现代数学译丛

几　何

（第一卷）

群的作用、仿射与射影空间

[法] M. 贝尔热 著

科 学 出 版 社

目　　录

第 0 章　记号和预备知识

0.1 集　合

若 A, B 是E的两个子集，则记

$$A\backslash B=\{x\in E:\ x\in A\ 且\ x\notin B\}.$$

若 $f:E\to F$ 是映射，$A\subset E$，则把 f 在 A 上的限制记作

$$f|A\ 或\ f|_A.$$

X到自身上的恒等映射记作 Id_X.

若 $\{x_i\}_{i=1,\cdots,n}$ 是一集合，则把除去元素 x_i 后的集合记作

$$\{x_1,\cdots,\hat{x}_i,\cdots,x_n\}.$$

$\#X$ 表示X的基数.

0.2 代　数

N 表示正整数全体和零，**Z** 表示整数环，**R** 为实数域，**C** 为复数域，**H** 为四元数体(见 8.9)．$\mathbf{R}_+$(相应地 $\mathbf{R}_-$)表示正(相应地负)实数和零的集合，$\mathbf{R}_+^*$ (相应地 $\mathbf{R}_-^*$)为除去 0 后的集合．对一个域 K，K^* 表示这个域除去 0．关于代数结构，分别用 $\mathrm{Hom}(\cdot;\cdot)$，$\mathrm{Isom}(\cdot;\cdot)$ 来记从一个赋有该代数结构的集合到另一个赋有同一代数结构的集合的同态和同构的全体，但对两个向量空间，我们用 $L(E;F)$ 代替 $\mathrm{Hom}(E;F)$，来表示从E到F中的线性映射全体．我们约定，提到两个向量空间时，往往总是指在同一个域上的．向量空间E的线性群是 $\mathrm{Isom}(E;E)=\mathrm{GL}(E)$．对向量空间$E$而言，$E=A\oplus B$ 表示E是它的两个向量子空间A和B的直和．对向量空间 E，E^* 表示它的代数对偶空间.

I 表示单位阵，${}^tA$ 表示A的转置.

对集合 X，$\mathfrak{S}_X$ 表示它的置换群，即双射 $X \to X$ 全体关于映射合成所成的群. 对 $X = \{1, 2, \cdots, n\}$，把群 $\mathfrak{S}_X$ 写作 $\mathfrak{S}_n$(称为对称群)，$\mathscr{A}_n$ 表示由偶置换全体构成的 $\mathfrak{S}_n$ 的闭子群(称为交错群). Klein 群 $\mathscr{V}_4$ 就是二元素群自乘的积 $\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2$. 二面体群 $\mathscr{D}_{2n}$ (其中 n 是任一整数)是在 $ab = ba^{-1}$ 这一关系下循环群 $\mathbf{Z}_n$ 经由 $\mathbf{Z}_2$ 的扩张，这里 a(相应地 b)是 $\mathbf{Z}_n$(相应地 $\mathbf{Z}_2$)的生成元.

$\binom{n}{p}$ 表示二项式系数(也记作 C_n^p)，参见 1.5.2.

除非另有申明，所有我们讨论的域都是交换域.

0.3 度 量 空 间

在距离记为 d 的度量空间里，对子集 $A \subset X$ 引进它的直径 $\operatorname{diam}(A) = \sup\{d(x, y): x, y \in A\}$(在 $\mathbf{R}_+ \cup \infty$ 中加以考虑). 对两个子集 A，$B \subset X$，A 到 B 的距离就是数量

$$d(A, B) = \inf\{d(x, y): x \in A, y \in B\},$$

特别有

$$d(X, A) = \inf\{d(x, y): y \in A\}$$

(不要把 $d(A, B)$ 跟 9.11 中引进的 $\delta(A, B)$ 混淆起来).

对球，我们采用 [FR] 中的记号:

$$U(a, r) = \{x \in X: d(a, x) < r\},$$
$$B(a, r) = \{x \in X: d(a, x) \leqslant r\},$$

更一般地

$$U(A, r) = \{x \in X: d(x, A) < r\},$$
$$B(A, r) = \{x \in X: d(x, A) \leqslant r\}.$$

有些情况下要强调指明 X，就写成 $B_X(\cdot, \cdot)$.

若 X, Y 是两个度量空间，$\operatorname{Is}(X; Y)$ 就表示从 X 到 Y 中的等距对应的全体，亦即满足

$$d(f(x), f(y)) = d(x, y) \quad \forall x, y \in X$$

的 $f: X \to Y$ 全体.

特别记 $\mathrm{Is}(X;X)=\mathrm{Is}(X)$.

0.4 一 般 拓 扑

我们多次用到：一族递减的紧集有非空交集（在 11.7.3.2 里我们将重温这一事实的证明）.

0.5 双 曲 三 角

定义双曲余弦、正弦和正切如下：

$$\mathrm{ch}t=\frac{e^t+e^{-t}}{2},\qquad \mathrm{sh}t=\frac{e^t-e^{-t}}{2},$$

$$\mathrm{th}t=\frac{\mathrm{sh}t}{\mathrm{ch}t}\ (t\in\mathbf{R});$$

并引进“主值反双曲余弦”函数

$$\mathrm{Arc\ ch}=(\mathrm{ch}|\mathbf{R}_+)^{-1},$$

它是一个映射 $[1,\infty[\ \to\mathbf{R}$.

0.6 Lebesgue 测度，积分理论

在有些部分，我们相当自由地使用这些内容. 特别是一些基本定理：收敛定理，积分与极限交换定理，Fubini 定理，关于 $\mathbf{R}^n$ 的开集上 C^1 阶映射的变量替换定理. 我们还会碰到一个子集 K 的特征函数 χ_K；以及测度空间的象空间的概念. 关于这些内容的一本参考书是 [GT]（Guichardet 著，积分学，Armand Colin 出版社）.

第 1 章　群在集合上的作用：概念，例子和应用

将一个空间的几何学，看作是研究变换群作用下的不变性质，这种观念是 Félix Klein 在著名的"Erlangen 纲领"中提出的（参见 [GBG]，特别是第 253 页）。

本章中，我们定义群在集合上的作用，可迁性，稳定群，齐性空间，一意性等概念，并用大量代数的、尤其是几何的例子来说明它们。这些例子读者在以后各章还会遇见。

本章最末两节 1.7 和 1.8，分别讲拼嵌群和绕空间一个定点的旋转群的有限子群。这两节充分应用了前面各节引进的概念；我们之所以选用这两部分内容，是因为它们既有造型上的方便，又有某些处理上的困难——这跟问题本身显然的初等性形成对照。1.8 节跟三维空间的正多面体关系很密切，在 12.5 节我们还会遇到这些多面体。

1.1　定　　义

对任一集合 X，我们用 $\mathfrak{S}_X$ 来记双射 $f: X \to X$ 全体所成的群（对于记作"$\circ$"的映射合成或乘法而言）。

1.1.1　定义． 设 G 是群，X 是集合．G 在 X 上的作用，就是一个同态 $\varphi: G \to \mathfrak{S}_X$；我们也说 G（通过 φ）作用在 X 上．

1.1.2　记号． 对 $g \in G$，$x \in X$，记 $\varphi(g)(x) = g(x)$；作用则记为 (G, X, φ) 或 (G, X)．特别有

$$\forall g \in G: x \longmapsto g(x) \text{ 是双射；}$$

$$\forall g, h \in G,\ \forall x \in X: g(h(x)) = (gh)(x).$$

例如对所有的 x 和 G 的单元 e，都有 $e(x) = x$；且 $\varphi(g^{-1}) =$

$(\varphi(g))^{-1}$.

1.2 例　子

1.2.1 $G\subset\mathfrak{S}_X$ 是一个子群，这是最常见的情形．例如，G定义为$\mathfrak{S}_X$ 的满足某些条件的子群．

1.2.2 置 $A=\{1,\cdots,n\}$，则 $\mathfrak{S}_A=\mathfrak{S}_n$(对称群)．设 $G=\mathfrak{S}_n$．于是G作用在A上;但它也很自然地作用于 $X=\mathscr{P}_{n,p}=\{P\subset A:\#P=p\}$，即$A$中$p$个元素所成子集的全体 $(0\leqslant p\leqslant n)$．

1.2.3 对给定的 $g\in\mathfrak{S}_n$，设 $G=\{g^k:k\in\mathbf{Z}\}\subset\mathfrak{S}_n$，则$G$作用在$A=X$上．

1.2.4 若X是向量空间,则它的线性群

$$G=\mathrm{GL}(X)=\{f:X\to X:\quad f\text{ 为线性双射}\}$$

作用于X上．

1.2.5 设E是欧氏向量空间(见第 8 章),且

$$O(E)=\{f\in\mathrm{GL}(E):\quad f\text{ 等距}\},$$

则 $G=O(E)$ 自然地作用在$X=E$上． 而且从 $O(E)$ 还可导出两个作用，它们分别作用于 Grassmann 流形

$$X=G_{E,p}=\{V\subset E:V\text{为}E\text{的 }p\text{ 维子空间}\}$$

和

$$X=\{E\text{ 的标准正交基}\}.$$

1.2.6 设$X=G$是群,则$G=G$通过好几种方式作用于自身,它们都很重要:

$$\varphi(g)(h)=gh\text{ (左平移)};$$
$$\varphi(g)(h)=hg\text{ (右平移)};$$
$$\varphi(g)(h)=ghg^{-1}\text{ (内自同构)}$$

1.2.7 设X是仿射平面 (见第 2 章)，$GA(X)=G$ 是X的仿射双射全体所成的群(X 的“仿射群”)，$\Gamma(X)$ 是X中二次曲线——定义为X的子集或者表示为方程形式——全体，则 $\mathrm{GA}(X)$ 作用在 $\Gamma(X)$ 上．

1.2.8 设X是任一度量空间,距离记为 d,则有它的等距群

$$\mathrm{Is}(X)=I(X)$$

作用其上:

$$G=\mathrm{Is}(X)=\{f\in\mathfrak{S}_X:\forall x,y\in X:d(f(x),f(y))=d(x,y)\}.$$

1.2.9 若 $G=\mathbf{R}$, $X=S^3=\{x\in\mathbf{R}^4:\|x\|=1\}\subset\mathbf{R}^4$, 将$\mathbf{R}^4$看作$\mathbf{C}^2$,于是可定义作用 $(\mathbf{R},S^3,\varphi)$ 如下:

$$\varphi(t)(z,z')=(e^{it}z,e^{it}z').$$

这个例子在几何上是非常重要的: 参见 4.3.6.2 和 18.8.1 两节.

1.2.10 其它例子. 见 4.5.9,8.8,9.5,18.10.

1.3 一 意 性

1.3.1 定义. 作用 (G,X,Π) 称为一意的,如果Π是单射(也就是说,只有 $e\in G$一个元素对应于X上的恒等变换).

若 $G\subset\mathfrak{S}_X$ (参见 1.2.1),则作用总是一意的. 若G并非一意的,则可作 $(G/\ker\varphi,X,\varphi)$, 它总是一意的.

在 1.2 的例子中间, 仅 1.2.6 和 1.2.9 的作用并非现成就是一意的. 在 1.2.6 中,左平移和右平移都是一意的, 而内自同构当且仅当G的中心 Z_G 等于$\{e\}$时才是一意的. 1.2.9 中则有

$$\ker\varphi=2\pi\mathbf{Z}.$$

1.4 可 迁 性

1.4.1 定义. 作用 (G,X,φ) 称为可迁的, 如果 $\forall x$, $y\in X$, $\exists g\in G\,|\,g(x)=y$.

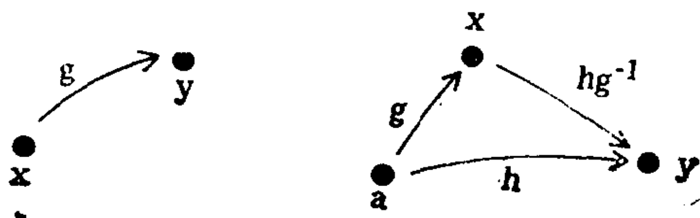


图 1.4.1.

实际上，只需验证 $\exists a \in X \mid \forall x \in X, \exists g \in G \mid g(a) = x$. 因为，若 $g(a) = x, h(a) = y$, 则 $y = (hg^{-1})(x)$.

1.4.2 例. 从可迁性的角度来看，1.2 中的各例情况如下：

——1.2.2 可迁；

——1.2.3 可迁当且仅当置换 g 是"循环"的；

——1.2.4 不可迁；在 $X\backslash 0$ 上可迁吗？

——1.2.5 在 E 上不可迁(为什么?)，但在任何 $G_{E,p}$ 上可迁 (为什么?)；

——1.2.6：平移是可迁的，但内自同构不可迁 (若 G 是交换群，则每点不动!)；

——1.2.7 不可迁：抛物线不是椭圆；见 15.3.3.2；

——1.2.9 不可迁：见 18.8.

1.4.3 定义. 作用 (G, X) 称为单可迁的，如果对任何 $x, y \in X$ 存在唯一的 $g \in G$ 使 $g(x) = y$.

1.4.4 例.

1.4.4.1 若 G 一意、可迁、可交换，则它必定单可迁. 因为，若 $\exists x, g, h \mid g(x) = h(x)$，就有

$$g(y) = h(y) \quad \forall y \in X,$$

事实上，

$$g(y) = g(k(x)) = k(g(x)) = k(h(x)) \\ = h(k(x)) = h(y).$$

1.4.4.2 左平移(参见 1.2.6)是单可迁的.

1.4.4.3 在 $G_{E,p}$ 上，对于 $0 \leqslant p \leqslant \dim E$，正交群 $O(E)$ 不是单可迁的；但在标准正交基全体上它是单可迁的.

1.4.5 推广. (G, X) 称为 p-可迁 ($p \in \mathbf{N}$)的，如果 G 在由 X 中 p 个不同点构成的点组的集合上可迁. 见 2.3.3.5, 4.5.10, 4.6.9, 6.1.1, 9.1.6, 9.1.7, 9.6.2, 9.7.1, 18.5.5, 18.8.4, 18.10.6, 19.4.5.1 中的例子. $p = 2$ 时，也称为双重可迁，余类推.

1.5 稳定群，齐性空间

现在来考虑某种非单可迁性，因为我们注意到，若

$$y = g(x) = h(x),\ \text{则}\ (h^{-1}g)(x) = x.$$

1.5.1 定义. 对于作用 (G, X)，所谓 $x \in X$ 的稳定群或迷向群就是 $G_x = \{g \in G : g(x) = x\}$.

1.5.2 例. 在 1.2.2 中，对于 $X = A$ 和 $x = 1$，有自然同构 $G_1 \cong \mathfrak{S}_{n-1}$. 若 $X = \mathscr{P}_{n,p}$，则

$$G_{\{1,\cdots,p\}} \cong \mathfrak{S}_p \times \mathfrak{S}_{n-p}.$$

通过这种同构，可以计算置换和组合的总数，即 $\#\mathfrak{S}_n = n!$ 和

$$\#\mathscr{P}_{n,p} = \binom{n}{p} = C_n^p,$$

见 1.5.8.

在 1.2.6 中，对内自同构，有

$$G_g = \{h \in G : hg = gh\},$$

即 g 的换位子群.

在 1.2.5 中，对 $G_{E,p}$ 有同构 $G_V \cong O(p) \times O(n-p)$（其中 $n = \dim E$）和 $O(p) = O(\mathbf{R}^p)$.

1.5.3 恒有

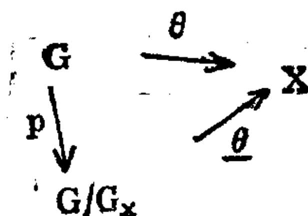
$$\boxed{G_{g(x)} = gG_Xg^{-1}}$$

换句话说，$G_{g(x)}$ 和 G_x 是 G 的两个（通过一个内自同构）共轭的子群，因而总是同构的. 这样就用另一种方式很快地得出 1.4.4.1 的结论.

1.5.4 定义. 集合 X 称为(关于作用 G 的)齐性空间，如果 $\exists(G, X, \varphi)$ 可迁.

设 X 关于 (G, X, φ) 是齐性的，固定 $x \in X$；设 $\theta : G \to X$ 定义为 $\theta(g) = g(x)$. 由于 $g(x) = h(x)$ 等价于 $h^{-1}g \in G_x$，所以 θ 通过下述等价关系推衍到 G 的商空间 G/G_x:

$$g\Re h \Longleftrightarrow h^{-1}g \in G_x.$$



（注意： G/G_x 一般并不是群！）由上图可见：$\underline{\theta}: G/G_x \to X$ 是双射．于是，在集论的意义上有

1.5.5

$$\boxed{X \underset{\text{集}}{\cong} G/G_x}$$

这个关系式是极其有用的，有了它，可以把对集合 X 的研究化为一个代数问题，即对 (G, G_x) 的研究：例如可参见[B-H]，[WF]．

1.5.6 推论． 若 G 有限，则 X 也有限，且 $\# X = (\# G)/(\# G_x)$（对任一 $x \in X$）．

1.5.7 有一点要注意：若 G 和 X 都是拓扑空间，而 φ 是 $G \times X$ 到 X 中的连续映射，则一般说来，拓扑空间 X 并不同胚于带有商拓扑的 G/G_x：见 1.9.1 中的一个反例．

1.5.8 应用"牧羊人法则"（参见 [BI 0]，p. E III. 41），由 1.5.2 和 1.5.6 可得出 $\# A = n = (\# \mathfrak{S}_n)/(\# \mathfrak{S}_{n-1})$，于是由数学归纳法就有 $\# \mathfrak{S}_n = n!$．从而

$$\# \mathscr{P}_{n,p} = (\# \mathfrak{S}_n)/[(\# \mathfrak{S}_p)(\# \mathfrak{S}_{n-p})] = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

1.5.9 由 1.5.2 和 1.5.5，可将 Grassmann 流形 $G_{E,p}$ 写成齐性空间 $G_{n,p} = O(n)/O(p) \times O(n-p)$；它的应用可见 [HU] 中第 18 章，也可参见 14.3.7．

1.6 轨道，分类公式

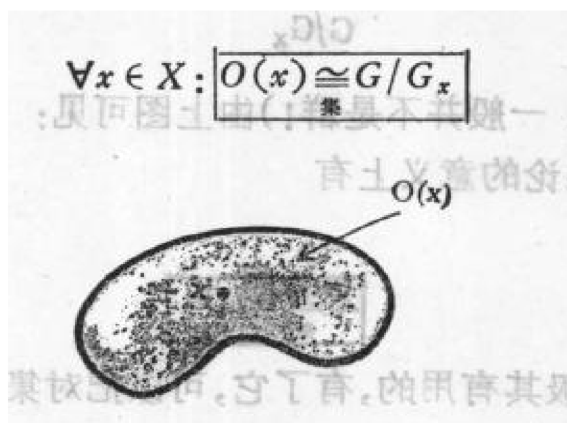
现在研究非可迁性．

1.6.1 定义． 对于 (G, X)，$x \in X$ 的轨道 $O(x)$ 就是

$$O(x) = \{g(x) : g \in G\}.$$

在 X 中引进等价关系 $x \Re y \Longleftrightarrow \exists g \in G \mid g(x) = y$，则我们看到，等价类就是轨道，因而它们构成一个划分．这样就得到一个轨道空间 X/G。由 1.5.5 有

1.6.2



由 1.5.6 又有

1.6.3 推论． 若 G 是有限集，则对任一 x，$O(x)$ 是有限集，且

$$\#O(x) = (\#G)/(\#G_x).$$

1.6.4 例． 1.2.3 中的轨道称为置换 g 的循环．通过对它们的讨论，可将 $\mathfrak{S}_n$ 中的共轭元素进行完全分类．

1.2.5 中，对于 $X = E$，轨道是以原点为中心的球面：

$$S(0, r), \ r \in \mathbf{R}_+ .$$

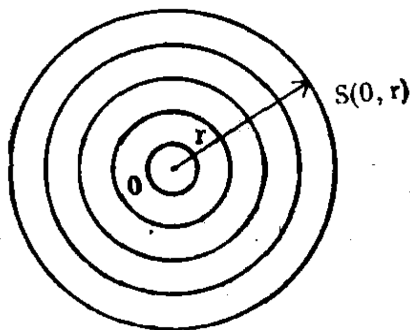


图 1.6.4.

1.2.9 中轨道集合的结构是很有趣的；容易看出所有的轨道都是圆（由于 $S^1 = \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$，见 1.2.3 末尾），而且是两两相套的，因此商空间同胚于球面 S^2（见 4.3.6）．要将这种 S^3 按圆所作的划分表示出来是很难的，那就是著名的 Hopf 纤维化；请参阅 18.8 和 18.9

中从不同的角度对这个重要例子所作的讨论.

1.6.5 附注. 给定作用 (G, X) 后,找出轨道并将轨道集合 X/G 参数化的问题,通常称为分类问题. 我们会看到许多这样的例子:关于 1.2.6 和 1.4.2,可见 2.7.5.11. 此外,关于角,可参见 8.6,8.7,二次形式的分类,可参见 13.1.4,仿射二次曲面分类,可参见 15.2,或者也可参见 18.6,13.10.

1.6.6 推论(分类公式). 设 X 和 G 都有限, G 作用在 X 上. 若 $A\subset X$, 而且 A 跟每条轨道交于一点且只交于一点,则

$$\boxed{\# X=\sum_{x\in A}\# G/\# G_x}$$

A 称为映射 $p:X\to X/G$ 的一个截面, 因为有 $s:X/G\to X$ 使 $p\circ s=\mathrm{id}_{X/G}$ 且 $A=s(X/G)$; 我们可以说, A 将轨道集合参数化了.

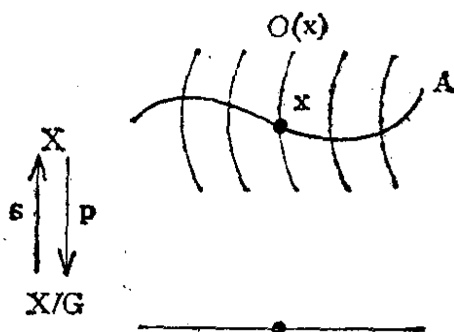


图 1.6.6.

1.6.7 在 p-群上的应用

1.6.7.1 定义. G 称为一个 p-群, 如果它是有限群且存在素数 p 和 $m\in\mathbf{N}^*$ 使 $\# G=p^m$.

1.6.7.2 定理. 每个 p-群都有一个非平凡中心.

证明: 我们通过内自同构,使 G 作用在 G 上 (参见 1.2.6), 并将 G 的中心记为 Z_G, 考察在 $X=G\backslash Z_G$ 上由 G 所诱导的作用(参见 1.4.2,1.2.6).

关于 A 对 X/G 所作的参数化,有(参见 1.6.6):

$$\# X = \sum_{x \in A} \# G / \# G_x,$$

由此有

$$\# G = p^m = \# Z_G + \sum_{x \in A} \# G / \# G_x,$$

但以 $\# G_x$ 除 p^m 仍是 p 的乘方，而且 $\# G / \# G_x = p^{m(x)}$，其中 $m(x) \geqslant 1$。因此 p 除得尽 $\# G$ 和 $\# X$，从而除得尽 $\# Z_G$。

1.6.7.3 附注. 1.6.7.2 的证明过程，是证明每一有限域必为可交换的这一结论时的关键所在。例如可参见 [AN] 第 37 页。为使 1.6.7.2 的证明更精炼，可讨论一个 $p^m q$ 阶有限群的 Sylow 子群(p, q 是两个互质的素数)，见 [SE1]，第 147 页。

1.6.8 现在，作为这章概论的结尾，我们来讨论两个更复杂的问题，其中一个是平面几何的问题，另一个是立体几何的问题。证明过程都是粗线条的，对细节感兴趣的读者，或可自己动手补出证明，或可自行查阅参考文献。

1.7 拼 嵌 群

1.7.1 参观格拉纳达城阿朗勃拉宫的旅游者，正如浏览下面几页的读者一样，都会对重复排列某种图案而覆盖整个平面的图形发生兴趣。实际上，图案可以千变万化，而排列的方法却是有限的；确切地说，不多不少恰好 17 种。读者可参见 1.7.4.1 至 1.7.4.5 各节以及 1.7.6.1 至 1.7.6.12 各节。在阿朗勃拉宫仅有其中的十一种。其余六种，有五种可在撒哈拉南部的巴库巴和贝斯兰部落里见到，另一种则见于一种中国图案。1.7 节的目的，就是将这些“重复排列图案”的问题公理化，然后证明只有 17 种可能的群。在阿朗勃拉宫没有动物或人的图案，这纯然是宗教禁令这种表现形式的结果(与之相反，例如图 1.7.4.8 和 1.7.6.13 就有这类图案)。其实，甚至可以这么说：正是这种禁令——它阻止了艺术家探求新的图案的创造性——推动着艺术家创造各种方式去重复某一图案，以致

最后发现了17种可能的方式；这个成就对那个时代来说，是相当惊人的. 也请参阅 1.7.7.8.

1.7.2 为了说明(除了其它目的外)本节标题的意义，我们的公理化做法可以这样开始：假定装饰画家用一块瓦片或者一个拼嵌样模着手铺填平面，他凭这种瓦片变化出种种式样来. 为了简便起见，我们先假定他移动瓦片时并不转动它，或者说，瓦片是沿着一边铺开去的；参见1.7.6. 设 E 是欧氏平面，$P\subset E$ 是拼嵌样模所占的部位；P 经移动后应填满整个平面而无空隙，这就是下面的公理 GP2. 但要得到阿朗勃拉的那些铺嵌图形，这一点还是不够的. 事实上，有所谓"不规则"的铺嵌，譬如象：

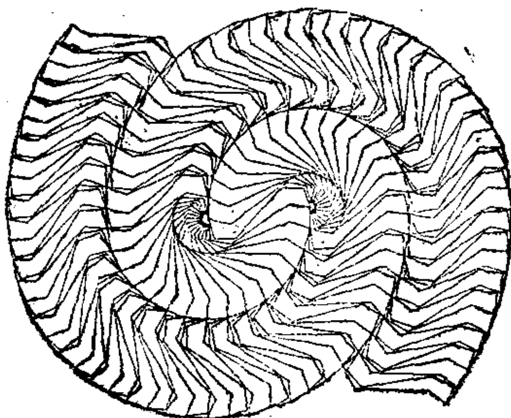


图 1.7.2.

德国数学会年鉴，1937年第46册，原作者 H. Vorderberg. Teubner.

它是由一个九边形的样片经过平面的正等距变换拼成的. 这个铺嵌图形是从 Voderberg 的书上引用来的，见 [VG1] 和 [VG2]；它具有一个惊人的性质：两个样模之间的空隙可以由同样的样模填满. 读者可以自己来拼一个不规则的铺嵌图形：把 R^2 的正方形样模随意地水平或竖直地放在整数坐标点所构成的 $\mathbf{Z}^2$ 的网点上，如图 1.7.3. 关于有趣的"严格非周期铺嵌"问题，可参阅[RN1]，[RN2] (见 19.6.12)，[RN3]，[GA]. 也可参见 1.9.16 和第 170 页的图. 如果要得出"规则"的铺嵌图形，就要引进一个 E 的等距变换群，这就是下述的公理 GP1. 在图 1.7.2 和 1.7.3 中并没有群.

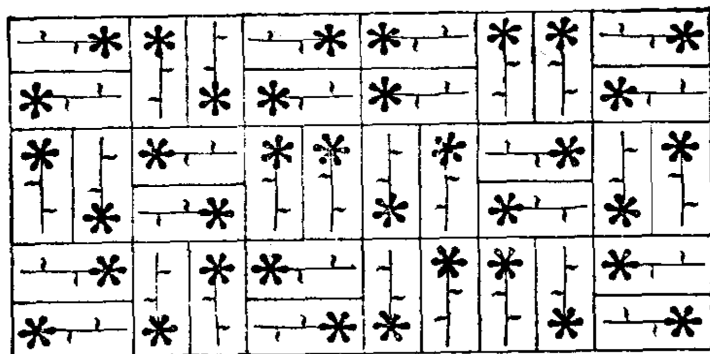


图 1.7.3.

1.7.3 拼嵌群公理． E 是欧氏平面，P 是 E 中一个连通紧集，P 的内部非空，G 是 E 的正等距(移动)群 $\mathrm{Is}^+(E)$ 的子群，它们满足：

GP1 $\bigcup\limits_{g\in G} g(P)=E$，

GP2 若 $g(\mathring{P})\cap h(\mathring{P})\neq\varnothing$，则 $g(P)=h(P)$．

1.7.4 现在我们证明，倘若在 E 的线性群中把共轭的子群看作同



图 1.7.4.1.

一个群，满足上述公理的群 G 只有五个；它们分别对应于下面的五个图，其中的那些样模是最基本的，也就是说，它们满足一个比 GP2 更强的公理，即从 $g(\mathring{P})\cap h(\mathring{P})\neq\phi$ 就有 $g=h$．

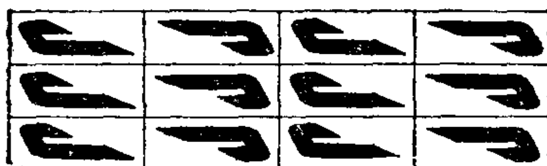


图 1.7.4.2.

即使这些群(不计共轭差别)都是有限的，样模式样还是可以变化无穷的．

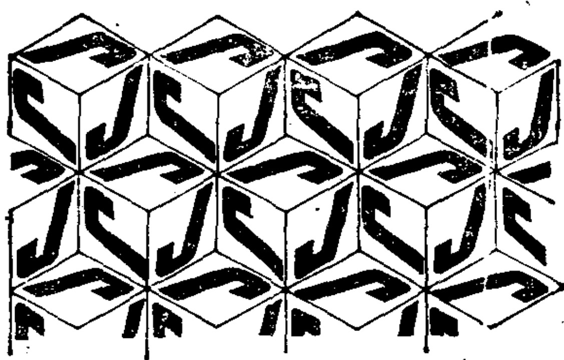


图 1.7.4.3.

1.7.5 证明

1.7.5.0 设 $\vec{E}$ 是 E 的底向量空间，且映射

$$\to : \mathrm{Is}^+(E) \to \mathrm{GL}(\vec{E})$$

的核 $\ker(\to) = T(E)$ 是 E 中平移的全体（有关内容可参见 2.3.3.4）。我们知道(参见 9.3.4)每个

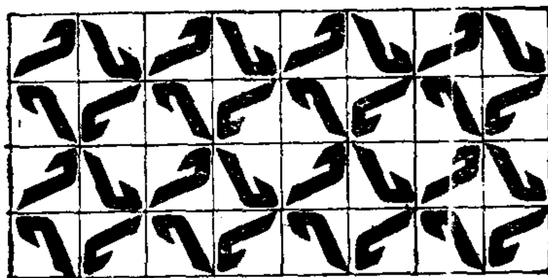


图 1.7.4.4.

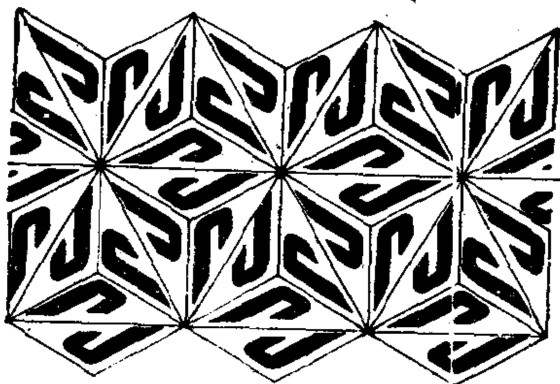


图 1.7.4.5.

图 1.7.4.1 到 1.7.4.5 和 1.7.6.6 到 1.7.6.12 都转引自 Y. Bossard 著«花饰、檐壁及铺嵌», CEDIC, 1977.

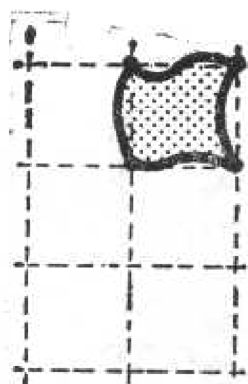


图 1.7.4.6.

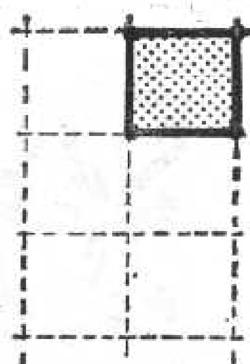


图 1.7.4.7.

图 1.7.4.8.

M. C. Escher, “无穷动”,水彩画, 1953 年, 305×230mm.海牙 Escher 纪念馆.

$$f \in \mathrm{Is}^+(E) \setminus T(E)$$

有且仅有一个不动点,称作它的中心,并有一个角度;这些 f 就是旋转. 下文中我们在许多地方引用了第 9 章中有关欧氏平面仿射几何的结果,有时就不再重申. 证明中第一个关键的想法是:

1.7.5.1 群 G 离散地作用于 E,换句话说,$\forall a \in E$,轨道 $G(a)$ 在 E 中是离散的,甚至是由孤立点组成:$\forall b \in G(a) \exists \varepsilon > 0$ 使得对以 b 为中心、以 ε 为半径的圆盘 $B(b, \varepsilon)$ 有 $B(b, \varepsilon) \cap G(a) = \{b\}$. 特别在 E 的一个紧集中,所有的轨道都只有有限多个点,这是因为紧离散集总是有限集.

为了证明离散性,首先我们注意到,根据公理 GP2,E 中每个紧集只含有限多个不同的样模 $g(P)$:利用紧集中任一序列都有一个极限点这一性质,由归谬法即得结论. 然后再注意到,一个样模 $P' = g(P)$ 的稳定子群,设为 $G_{P'} = \{g \in G : g(P') = P'\}$,总是有限的. 事实上,根据 9.8.6.1,存在 $a' \in E$ 使

$$G_{P'} \subset G_{a'} = \{g \in G : g(a') = a'\}.$$

选取样模 P'' 使相应的点 a''(根据 9.8.6.1)有 $a'' \neq a'$. 既然只有恒等变换使 a' 和 a'' 都不动(必要时参阅 9.1.6),$G_{P'}$ 的基数就跟样模 $g(P'')$,$g \in G_{P'}$ 的个数相等;由于这些样模各各分布在一个以 a 为中心的圆周上,它们的个数是有限的.

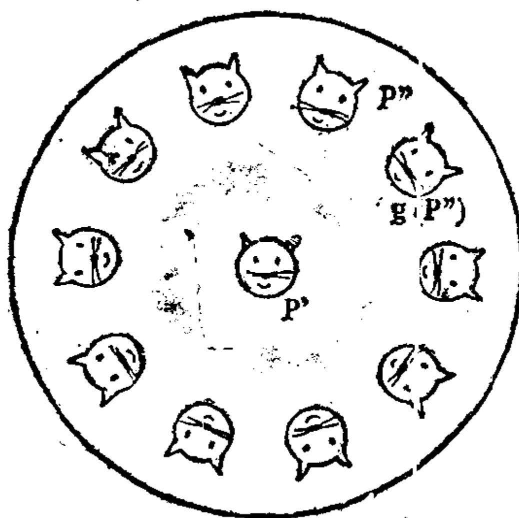


图 1.7.5.0.

最后要证明G的每条轨道 $G(a)$ 都是由孤立点组成的；由于G是群，我们就只要证明 a 在 $G(a)$ 里是孤立的. 设任给 $\eta > 0$；跟圆盘 $B(a, \eta)$ 相交的样模的个数是有限的，因为它们位于同一个紧集中，即以 a 为中心、以 $\eta + \delta$ 为半径的圆盘中，这里 δ 表示样模的直径. 然而 $B(a, \eta) \cap G(a)$ 的所有元素位于这有限多个样模中的一个之内，根据第一段，它们在每个样模中的个数就都是有限的. 于是 $G(a) \cap B(a, \eta)$ 有限，从而 a 在 $G(a)$ 中孤立.

证明的第二个要点是：引进G中由平移全体构成的子群

$$\Gamma = G \cap T(E).$$

于是：

1.7.5.2 群Γ是一个网格，也就是说，存在 $\vec{E}$ 的一个基$\{\vec{u}, \vec{v}\}$使得Γ正好是沿所有的向量 $\mathbf{Z}\vec{u} + \mathbf{Z}\vec{v}$ 的平移的集合.

首先，用归谬法证明Γ至少含有两个线性独立的平移. 先假定 $\Gamma = \mathrm{Id}_E$，那么G仅含旋转；若其中有两个旋转 r, s 的中心不同，则根据 1.7.5.0，换位子 $rsr^{-1}s^{-1}$ 是非平凡的平移，因此G中的旋转都是以同一点ω为中心的，于是 $\bigcup_{g \in G} g(P)$ 含在一个以ω为中心的圆盘内，从而与 GP1 相悖. 假定Γ中的方向都是平行的，并设 $r \in G \backslash \Gamma$，而 $t \in \Gamma$ 是一个沿向量$\vec{\xi}$的平移；则等距 rtr^{-1}

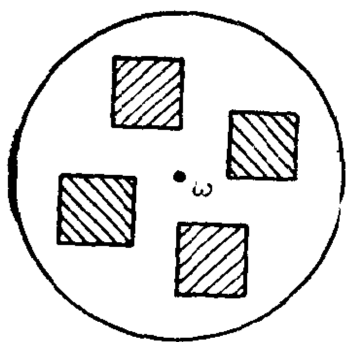


图 1.7.5.1.1.

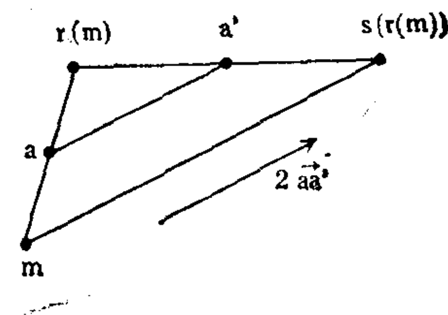


图 1.7.5.1.2.

就是沿向量 $r(\vec{\xi})$ 的平移，且因 $r(\vec{\xi})$ 应与$\vec{\xi}$平行，r必是一个中心对称. 于是 $G \backslash \Gamma$ 中所有的旋转都成了中心对称；若 r, s 分别以 a, a' 为对称中心，则sr就是沿向量 $2\overrightarrow{aa'}$的平移. 这样，$G \backslash \Gamma$

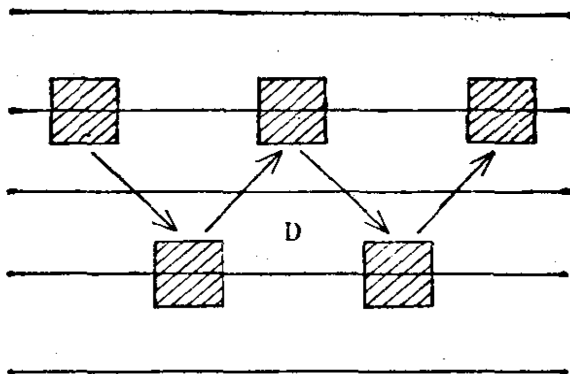


图 1.7.5.1.3.

中所有元素的对称中心就将位于一条平行于我们的平移方向的直线上；由此将推出 $\bigcup_{g\in G} g(P)$ 含于一条以D为中轴的带子内，这跟GP1 又是相悖的.

现在，Γ 已至少含有两个线性独立的向量平移；还要说明的是存在 $\vec{u}, \vec{v}$ 使

$$\Gamma = \{\text{平移 } \mathbf{Z}\vec{u} + \mathbf{Z}\vec{v}\}.$$

根据 1.7.5.1，可以找到Γ中一个具有最小模 $\|\vec{u}\|$ 的向量平移 $\vec{u}$ 以及具有最小模 $\|\vec{v}\|$ 的向量平移 $\vec{v}\notin \mathbf{Z}\vec{u}$；我们说，$\vec{u}$ 和 $\vec{v}$ 就是所要求的两个向量平移. 设Q是平行四边形

$$Q = \{a + t\vec{u} + s\vec{v} : t,\ s \in [0, 1]\},$$

顶点 a 是任意给定的. 由于G是群，而

$$\Gamma \supset \{\text{平移 } \mathbf{Z}\vec{u} + \mathbf{Z}\vec{v}\},$$

所以 $g(Q)$，$g\in\Gamma$ 充满整个 E；从而 a 在Γ作用下的轨道上的任一点——它不在 $a + \mathbf{Z}\vec{u} + \mathbf{Z}\vec{v}$ 内——将给定该轨道上位于Q内的一点 y. 但由 $\vec{u}, \vec{v}$ 的取法，y 到Q的四个顶点的距离都严格地小于 $\|\vec{u}\|$ 或 $\|\vec{v}\|$. 由此得出Γ中这么一个平移，跟 $\vec{u}$ 和 $\vec{v}$ 的选取是矛盾的. 为了证明这一点，不失一般性，我们假设 y 位于三角形

$$\{a,\ b = a + \vec{u},\ c = a + \vec{v}\}$$

内；直线 $\langle a, y\rangle$ 交对角线 $\langle b, c\rangle$ 于 a'，我们有 $d(a, y) < d(a, a')$. 但 $d(a, a') < (d(a, b) + d(a, c))/2$，与 $\vec{u}$ 和 $\vec{v}$ 的选取矛

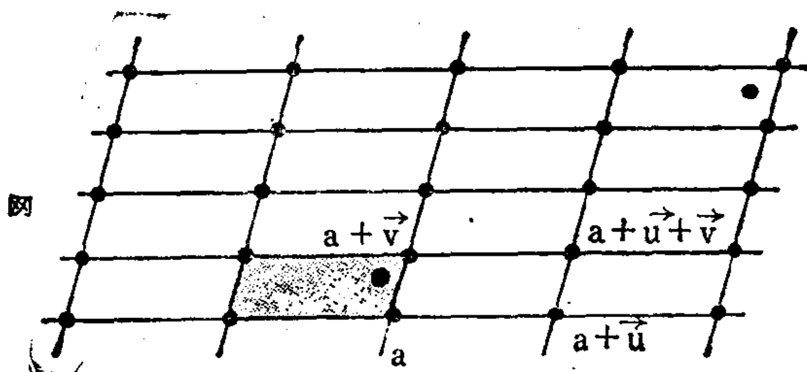


图 1.7.5.1.4.

盾.

1.7.5.3 现在来看G中真正的旋转，即 $G' = G \backslash \Gamma$ 的元素. 若 $r \in G'$，公理 GP2 说明 r 必定是有限阶的. G仅含二阶旋转，也即仅含关于E中的点的对称的情况，是很容易的：若 $G = \Gamma$，那就是图 1.7.4.1 的群；若确实有二阶旋转，那就是 1.7.4.2 的群. 所以，现在假定 $r \in G'$ 的阶 $\alpha \geqslant 3$，而且角度为 $2\pi/\alpha$，这总是可能的；设 a 是旋转中心. 设 b 是 G' 中不同于 a 且最靠近 a 的旋转中心；再设 s 是以 b 为中心、阶 $\beta \geqslant 3$、角度为 $2\pi/\beta$ 的旋转. 令 $t = (rs)^{-1}$，从而 $rst = \mathrm{id}_E$. 但 9.3.6 中证明，t 的中心 c 保证了三角形 abc 的内角和是 r, s, t 的角度之和的一半. 现在我们证明，由 b 的选取可以引出：若记 t 的阶为 γ，则 t 的角度

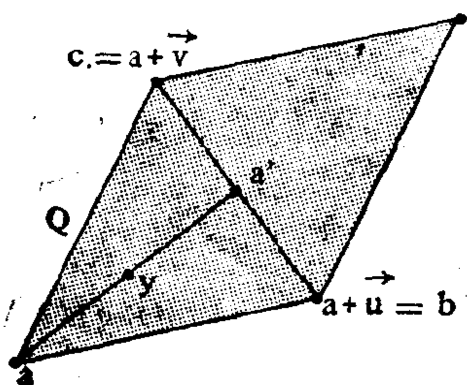


图 1.7.5.1.5.

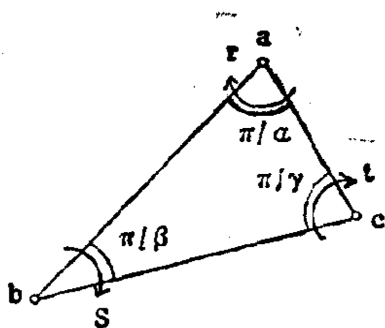


图 1.7.5.2.

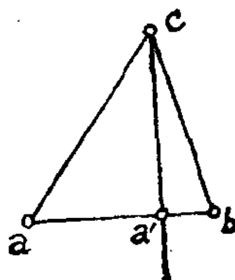


图 1.7.5.3.

等于 $2\pi/\gamma$. 事实上倘若 t 的角度为 $2\pi n/\gamma, n \geqslant 2, G'$ 中就将存在一个以 c 为中心、角度小于 t 的角度的旋转；由此，再用一次 9.3.6 的结果，就将得出 $(rt')^{-1} \in G'$ 且其中心 a' 比 b 更靠近 a，这是矛盾.

因为三角形内角和为 π，我们就有

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=1.$$

因为 $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{N}$ 且都 $\geqslant 3$，所有的可能性可由下表给出：

1.7.5.4

$$\boxed{\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=1}$$

	$1/\alpha$	$1/\beta$	$1/\gamma$
情形 I	1/3	1/3	1/3
情形 II	1/2	1/4	1/4
情形 III	1/2	1/3	1/6

容易证明 I, II, III 这三种情形分别相应于 1.7.4.3, 1.7.4.4 和 1.7.4.5 各图的群.

1.7.6 如果现在我们讨论同样的问题，但把 $\mathrm{Is}^+(E)$ 换成整个 $\mathrm{Is}(E)$ 群，也就是说瓦片的两面都得用来装饰铺砌，这时前面的讨论仍然有效(1.7.5.1 和 1.7.5.2)，但 G 的情况要稍微复杂一些；我们还能找到另外 12 个群，加在一起就是 17 个. 这 12 个群就是下面的图形所对应的那些群：

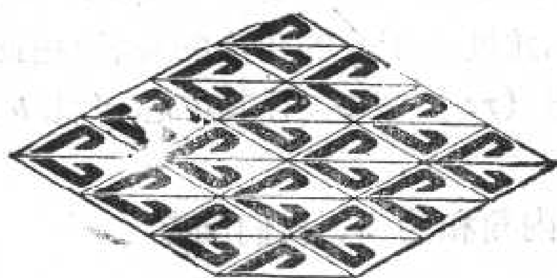


图 1.7.6.1

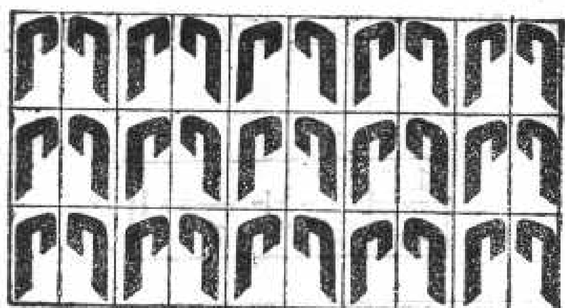


图 1.7.6.2.

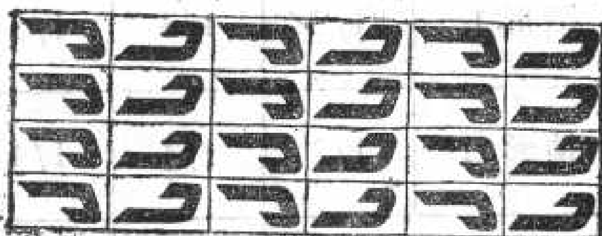


图 1.7.6.3.

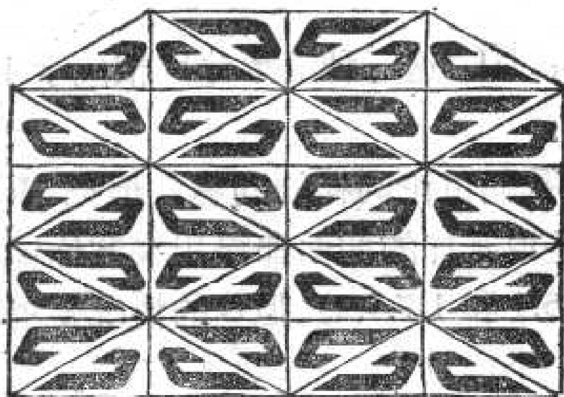


图 1.7.6.4.

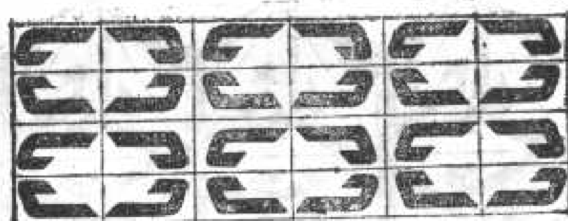


图 1.7.6.5.

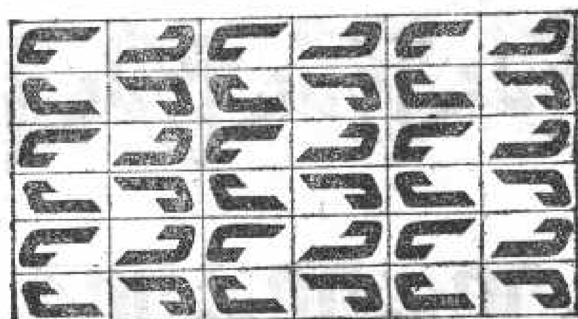


图 1.7.6.6.

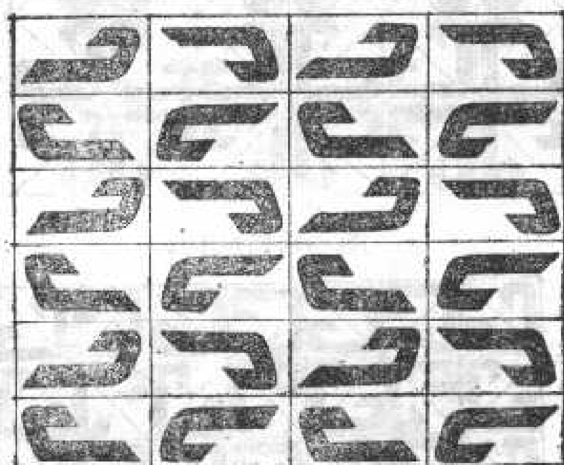


图 1.7.6.7.

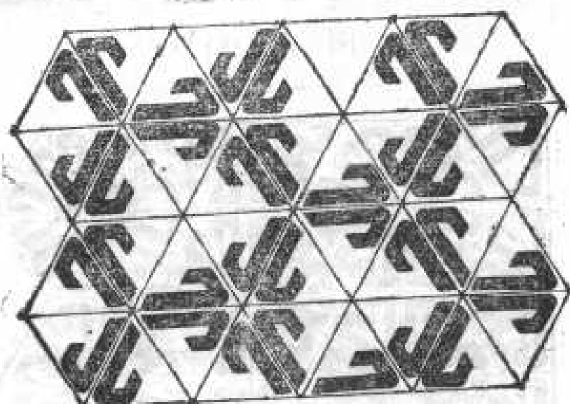


图 1.7.6.8.

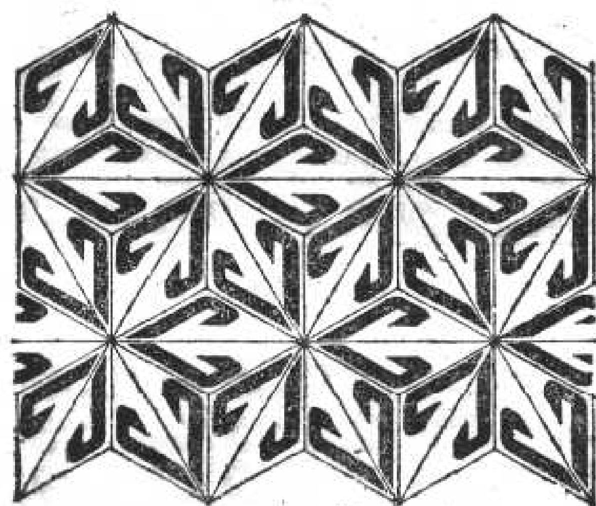


图 1.7.6.9.

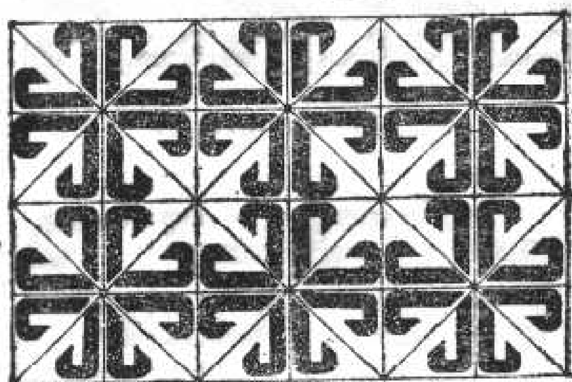


图 1.7.6.10.

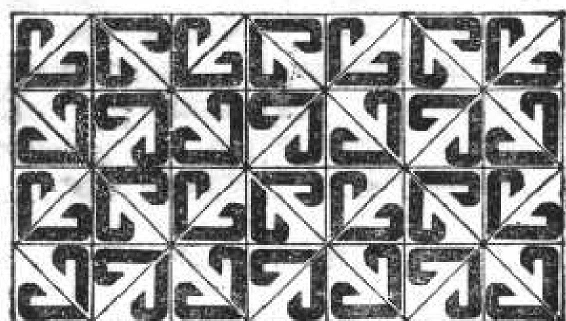


图 1.7.6.11.

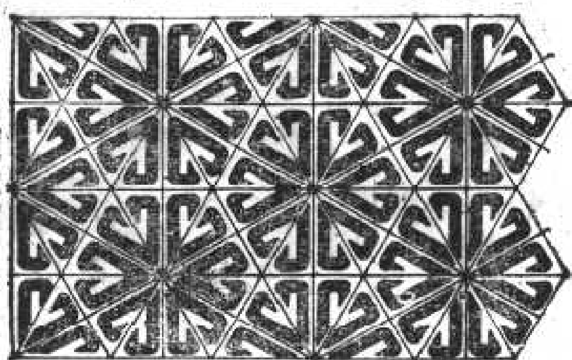


图 1.7.6.12.

1.7.7 附注

1.7.7.1 第一个严格证明拼嵌群共有17种的人，似乎是Fedorov(1891年)．进一步的历史的或工艺的说明，可参见[FT2]，p.38，[CR1]，p. 279，[H-C]，第II章．

Fedorov 的出发点是结晶学．关于平面及空间的晶体群，最新的完备的参考书是［BUR]，［CR2］中也有某些很有意思、很详细的历史材料．尤其可参见[SC1]．也可参见1.9.14和[SC2]．关于4维的情形，参见［B-B-N-W-Z]．

1.7.7.2 铺嵌的问题是在3维欧氏空间提出的，但在别的非欧的空间也有这个问题；例如在球面或在双曲空间．球面 S^2 上的铺嵌问题可参见下面的1.8.6节，双曲空间的铺嵌可参见19.6.12．

1.7.7.3 3维空间的铺嵌可见［BUR]，其中举出了230种铺嵌方式．在任意维的情形，问题相当复杂，我们还不能有什么预言．在4维的情形，有4783种．

1.7.5.2中关键问题的证明，在任意维的情形已不是那么容易，这是 Bieberbach 的定理，参见［WF]，第100页．

1.7.7.4 无不动点的(任意维)拼嵌群的分类问题，却来得更简单些，所谓无不动点是指 $\forall g \in G\backslash e$：对所有的 $x \in E, g(x) \neq x$．这种群之所以引起我们的兴趣，是因为商空间 X/G 是光滑的，而且还是一个微分流形．

在2维的情形，只有两个群具有这一性质，一个是图1.7.4.1的群，它给出的商空间是二维环面 $\mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$，另一个是图1.7.6.3的群，商空间为著名的 Klein 瓶．在［WF］第3章里有这些群在任意维情形下的分类；3维时有6种，参见［WF]，第117页．

1.7.7.5 关于铺嵌以及一些相近的但更引人入胜的内容，可参见［FT1］和［FT2]．

1.7.7.6 关于与图1.7.4.8和1.7.6.13相仿的其它图画，可参见[FT2]，“铠甲铁片”I, II, III 和［ER]．

1.7.7.7 还可参见1.8.7, 1.9.4, 1.9.9, 1.9.12．

1.7.7.8 关于一种更细致的、得出81种铺嵌形式的分类，参

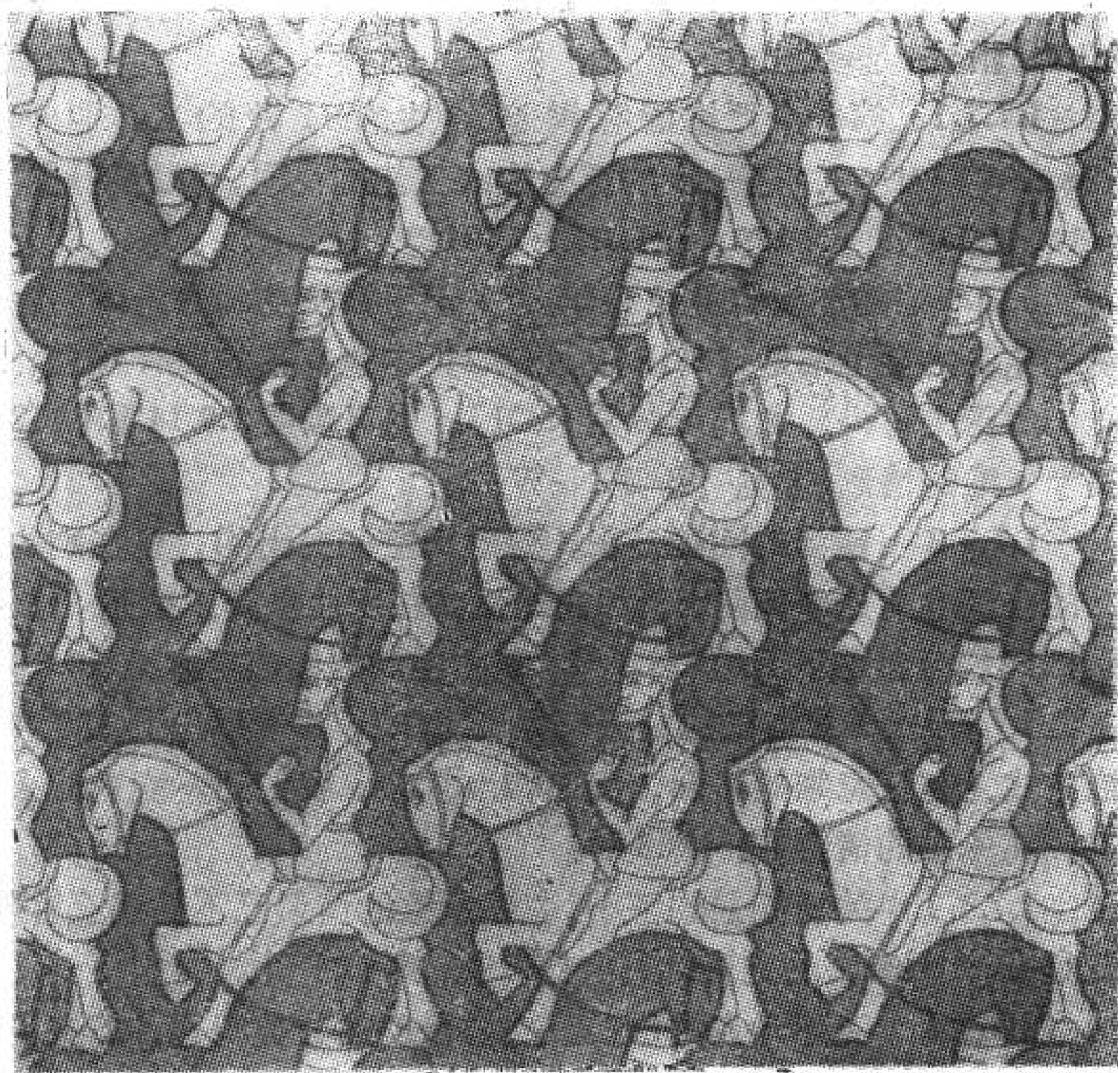


图 1.7.6.13.

M. C. Escher, "骑士循环铺嵌习作",墨汁与水彩,海牙 Escher 纪念馆.



图 1.7.6.14. 样模 P.

见 [GR-SH1]. 关于 91 种形式的，参见 [GR-SH2]. 也可参见 1.9.13.

1.8 S^2 的铺嵌，正多面体与 $O^+(3)$ 的有限子群

1.8.1 对 1.7.5.3 可作这样的解释：以 a 为中心的有限价的旋转，产生了以 a 为圆心的圆的规则铺嵌. 或者还可以这样说，平面铺嵌问题孕育着绕平面上固定点的旋转群，即 $O^+(2)$ 的同构群的有限子群的研究(参见 8.3). 同样，3 维欧氏空间的铺嵌问题孕育着 $O^+(3)$ 的有限子群的研究，而它又可以化为球面 S^2 的铺嵌问题. 这里，我们只讨论最后的这个问题，对 230 种空间晶体群感兴趣的读者可参看 [BUR].

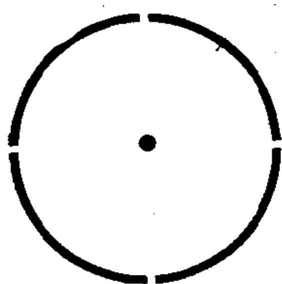


图 1.8.1.1.

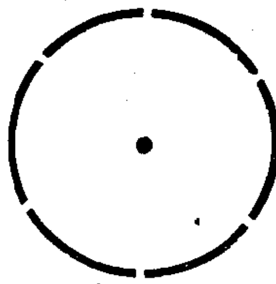


图 1.8.1.2.

1.8.2 定理. 不计 $O(3)$ 中的共轭差别的话，$O^+(3)$ 的有限子群共有五种，其中三种是群，两种是以 $\geqslant 2$ 的整数为足标的群序列.

在给出 1.8.3.4 中关于正多面体的直观模型之前，我们先对这个问题给出一种数学上的解决方法. 关于正多面体，参见 12.5, 12.6 两节.

1.8.3 证明提要

1.8.3.1 出发点是巧妙地运用分类公式 1.6.6. 另一种用到正多面体以及 Euler 公式的方法，将在 12.7.4 中给出；在 12.6 中我

们将对任意维的正多胞形进行分类。

设 $G\subset O^+(3)$ 是给定的有限子群，其作用限制在球面 S^2 上；引进

$$\Gamma=\{(g,x)\in(G\backslash e)\times S^2:g(x)=x\},$$

它是跟 G 在 S^2 中的不动点，也就是说(参见 8.4.7.1)是跟 G/e 的旋转轴有密切联系的。下面用两种办法来计算 $\#\Gamma$，先就 g 求和，然后就 x 求和。令

$$X=\{x\in S^2:g\in G\backslash e\,|\,g(x)=x\},$$

这是非平凡的 g 的不动点集合。

根据 8.4.7.1，每个 $g\in G\backslash e$ 恰好有两个不同的不动点，因而 $\#\Gamma=2(\#G-1)$. 为计算 $\#X$,我们来看 G 作用于 $X\subset S^2$ 的轨道以及由 1.6.6 中的截面 A 所给出的参数。对 $x\in A$，有（参见 1.6.2）：$\#O(x)=\#G/\#G_x$；但（参见 1.5.3）$\#G_y$ 对每个 $y\in O(x)$ 都是常数。设这常数记为 $\nu(x)$. 这个常数正是由 G_y 生成的旋转的阶数；于是有 $\#(G_y\backslash e)=\nu(x)-1$. 由于

$$G_y\backslash e=\{g\in G\,|\,(g,y)\in\Gamma\},$$

有

$$\#\Gamma=\sum_{x\in A}(\nu_x-1)\#O(x)=\sum_{x\in A}(\nu_x-1)(\#G)/(\#G_x)$$
$$=\sum_{x\in A}\frac{\#G(\nu_x-1)}{\nu_x},$$

从而

1.8.3.2

$$\boxed{2-\frac{2}{\#G}=\sum_{x\in A}\left(1-\frac{1}{\nu_x}\right).}$$

1.8.3.3 若所有的 ν_x 都很大,则每个 $1-(1/\nu_x)$ 都很接近 1，因此除了和式中不超过两项的情形外，它们的和是大于 2 的。由此容易看出,所有可能的情形有如下表所示：

	ν_1	ν_2	$\#G$
情形 I	n	n	n

2 轨道

	ν_1	ν_2	ν_3	$\#G$
情形 II	2	2	n	$2n$
情形 III	2	3	3	12
情形 IV	2	3	4	24
情形 V	2	3	5	60

n 为任何≥2 的整数

3 轨道

1.8.3.4 因此对轨道的基数及相应的迷向群的阶数而言，只存在 5 种可能的情形. 接下来还要证明 1°: 每种情形都是确实发生的; 2°: 不计在 $O(3)$ 中的共轭差别的话，每一种情形只对应一个群 G.

第 2° 点并不很难，但需要很仔细地讨论，参见 [AS]. 至于 1°,我们可以看到:

——情形 I 是由一个 $\mathbf{R}^3$ 中的 n 阶旋转所生成的 n 阶循环群实现的; 两个轨道由位于公共旋转轴上的、S^2 的两个点构成 (图 1.8.4.1);

——情形 II 是 $O^+(3)$ 中保持 $\mathbf{R}^3$ 的某平面上以原点为中心的正 n 边形的稳定性的子群的情形; G 包含 n 个角度为 $2k\pi/n$、以多边形的轴为轴的旋转，以及关于多边形中心跟顶点和各边中点的 n 条连线的对称 (注意 n 为奇数或偶数时的微小

差别）．群 G 称为**二面体群**（$2n$ 阶，参见 0.2）．多边形轴上的、S^2 的两点仅构成一个轨道，另两个轨道：一个是多边形的顶点（我们可以在 S^2 上描出来），一个是各边中点在 S^2 上的辐射投影点；见图 1.8.4.1；

——情形 III, IV, V 是由 $O^+(3)$ 中保持以原点为中心的正四面体、正六面体、正十二面体的稳定性的子群实现的．正四面体和正六面体的情形是显易的；正十二面体则不然，我们将在 12.5.5 再讨论．

1.8.4 我们说（参见12.5.4 和 12.5.5），正六面体和正八面体的群是

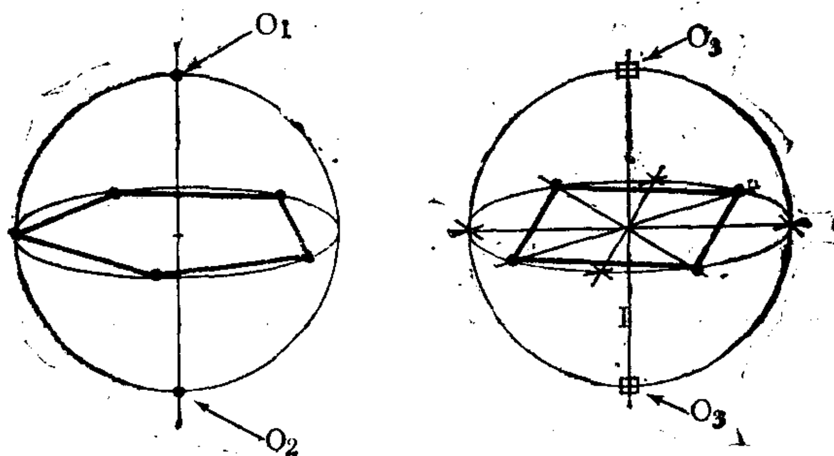


图 1.8.4.1

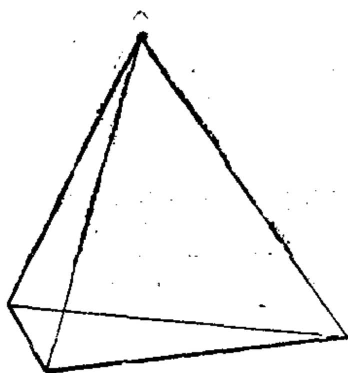


图 1.8.4.2.

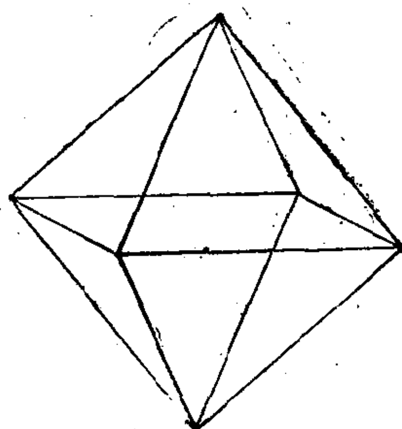


图 1.8.4.3

一样的，而且，正十二面体和正二十面体的群也是一样的．情形 III 的群 G 同构于 $\mathscr{A}_4$，IV 的群同构于 $\mathfrak{S}_4$，V 的群同构于 $\mathscr{A}_5$；

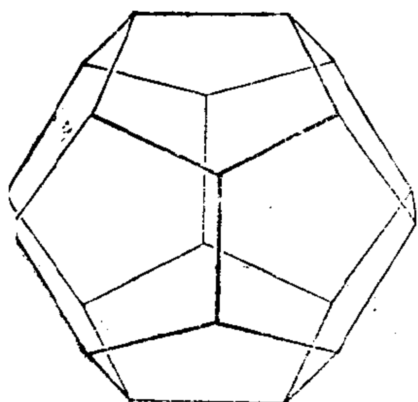


图 1.8.4.4.

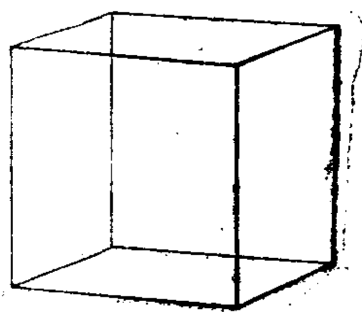


图 1.8.4.5.

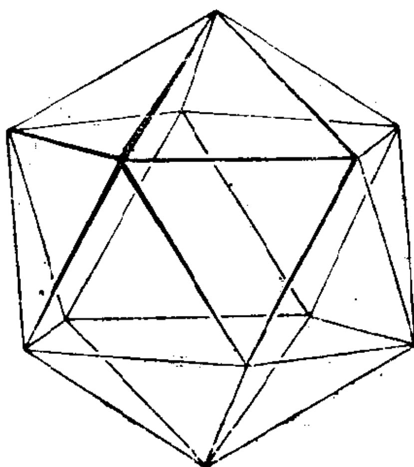
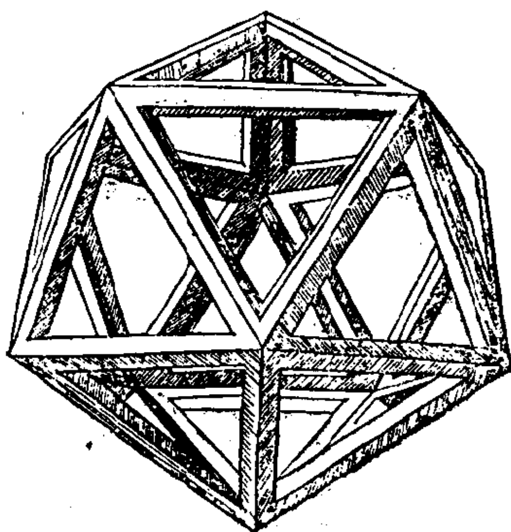
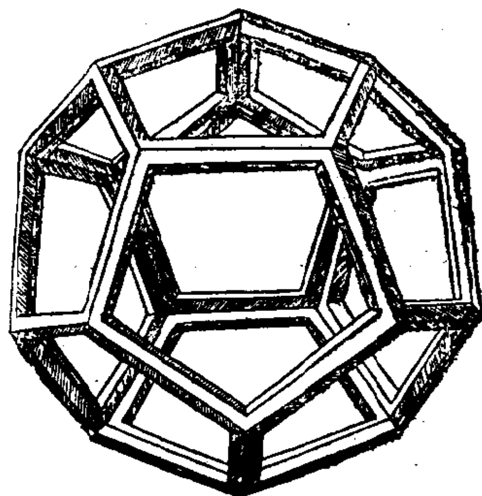


图 1.8.4.6.



达·芬奇为 Luca Pacioli 神甫《神奇的比例》所画的二十面体.



达·芬奇为 Luca Pacioli 神甫《神奇的比例》所画的十二面体.

图 1.8.4.7.

这些结论参见 12.5.5.6.

1.8.5 跟 1.7.6 的讨论相仿地，我们在这里也可以讨论 $O(3)$ 的

有限群。这并不困难；我们可以看到，跟情形V相应的是一个120阶的群，图形如下。它提供了相应的 S^2 的一种基本铺嵌。

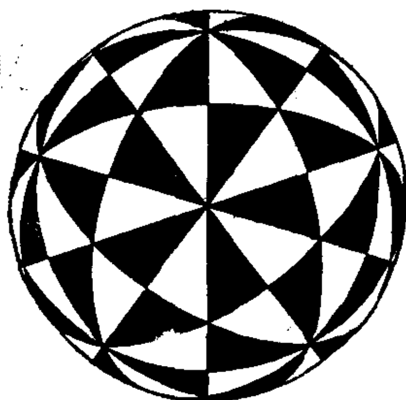


图 1.8.5.
H. S. M. Coxeter,《几何导论》, John Wiley 出版社.

1.8.6 对于 S^2 的铺嵌（或者甚至双曲平面的铺嵌，参见 19.2)，1.7.5.2 的主要方法还是可行的(图 1.7.5.3)：但必须考虑三个"旋转" r, s, t，使 rst = 恒等变换。

在欧氏、球面、双曲这三种几何里，它们的角度应有 $2\pi/\alpha$, $2\pi/\beta$, $2\pi/\gamma$ 的形式，α, β, γ 都是整数，而且这些角度之和应是这些旋转的中心 r, s, t 所构成的三角形的内角和的两倍。在欧氏几何里总有 $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=1$，根据 18.3.8.4，在球面几何里

1.8.6.1

$$\boxed{\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}>1,}$$

根据 19.5.4，在双曲几何里 $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}<1$。我们也可以由此出发对 $O^+(3)$ 的有限子群进行分类。显然它们是为数有限的(至少对 α, β, γ 的可能取值范围而言)。双曲几何则情形大不相同：除几个较小的数外，所有的 (α, β, γ) 组合都满足

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}<1,$$

在 19.6.2 中我们会看到，确实每个这样的群给出了双曲平面的一种铺嵌，因而后一种情形的群是为数无限的。有关的参考或补充的内容也可参见 19.6.12。

1.8.7 由生成元和关系定义的群

我们可以由满足一个关系的两个生成元 r, s 来定义二面体群 $\mathfrak{D}_{2n}$（参见 0.2 和 1.8.3.4)：

1.8.7.1 $r^n = s^2 = e, \ rs = sr^{-1}$.

1.8.3.4 中正多面体相应的三种 $O^+(3)$ 子群也可由满足下述关系的两个生成元 r, s 来定义：

$$r^p = s^q = (rs)^2 = e,$$

其中，对正四面体而言 $p, q = \{3, 3\}$，对正六面体为 $\{3, 4\}$，对正十二面体为 $\{3, 5\}$. 注意，满足这种关系的有限抽象群的存在性并不是很显然的.

也可以相仿地定义拼嵌群；例如图 1.7.4.1 的拼嵌群是由满足关系 $rs = sr$ 的两个生成元 r, s 定义的. 请读者自己写出其它的拼嵌群.

描述二面体群的另一种不同于 1.8.7.1 的方法，是指定两个生成元 r, s 满足一个关系：

1.8.7.2 $r^2 = s^2 = (rs)^n = e$.

相仿地，正多面体的三种稳定子群（$O(3)$ 的稳定子群，阶分别为 24，28，120，见 12.5.4.1，12.5.4.2，12.5.5.6）由三个生成元 r, s, t 和关系

1.8.7.3 $r^2 = s^2 = t^2 = (rs)^p = (st)^q = (tr)^2 = e$

所定义，p, q 如上所述.

我们注意到 1.8.7.2 和 1.8.7.3 非常相象；实际上这是更一般的群的两个特例，那种群定义为由超平面对称所生成的、欧氏仿射空间的等距群的离散子群. 它们之所以引起人们的兴趣，是因为在欧氏几何以外的好多领域都碰得到它们；特别是在半单李群的研究中，它们起了很大的作用. 关于这一近来进展很大的课题以及上面那些例子的进一步说明，可参见：［C-M］全书或其中第 38—51 页；［BI4］全书及其中第 234—240 页的历史附注.

1.9 练　　习

1.9.1 讨论 $G = \mathbf{Z}$ 作用在 $\mathbf{R}^2$ 的圆 S^1 上的轨道，这里，根据实数 α 的性质，$\mathbf{R}^2$ 是通过 $\varphi(n)(z) = e^{i\alpha n}z$ 等同于 $\mathbf{C}$ 的. 如果 α 是

无理数，由此可以作出 1.5.7 中提到的反例吗？

1.9.2 对 $G = \mathbf{R}$，$X = S^3$ 讨论同样的问题，沿用 1.2.9 中的记号：$\Pi(t)(z, z') = (e^{i\alpha t}z, e^{i\alpha t}z')$，$\alpha \in \mathbf{R}$.

1.9.3 根据下面给出的提要，完成定理 1.8.2 的证明.

1.9.4 先对其中 5 种、然后对所有 17 种拼嵌群，讨论：

——迷向群的阶；

——它的结构；

——它的各种轨道的性质；

——由生成元及关系给出的定义（参见 1.8.7）.

1.9.5 对作用在 S^2 上的 $O^+(3)$（或 $O(3)$）的有限子群讨论同样的问题.

1.9.6 画出在情形 I, II, III, IV 的群的作用下，S^2 的基本铺嵌样式.

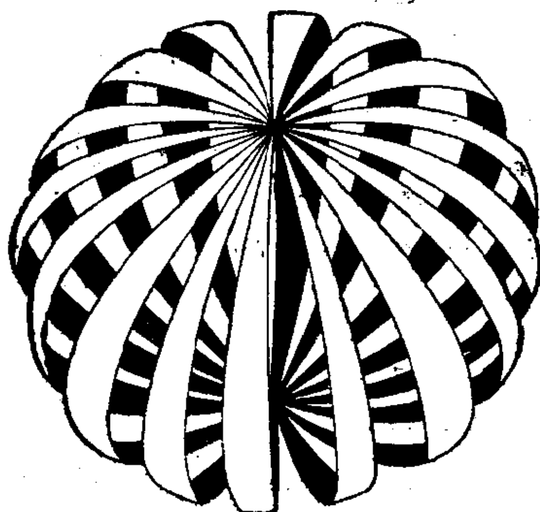


图 1.9.6.

1.9.7 证明从 1.7.7.4 中得到的商空间就是环面和 Klein 瓶.

1.9.8 证明对圆 S^1、球面 S^3（例如参见 18.8.1）以及更一般地对球面 S^{2k+1}，都存在无穷多种相应的拼嵌群.

1.9.9 比较、讨论下列著作中的拼嵌群分类问题：[GR]，第 72—84页，[H-C]，第 70—81 页，[WL]，第 22—115 页.

1.9.10 设 E 为 k 个元素的有限域上的有限 n 维向量空间，计算

$\# G_{E,p}$ (参见 1.2.5).

1.9.11 求 $O^+(3)$ 的所有的紧子群.

1.9.12 **基本域**. 设 $G \subset \mathrm{Is}(E)$ 是欧氏仿射平面的等距群的子群；假设 G 的所有的轨道都是 E 的离散子集. 对固定的 $a \in E$, 证明

$$P = \{x \in E : d(x, a) \leqslant d(x, g(a)) \quad \forall g \in G\}$$

满足拼嵌群公理.

1.9.13 **拼嵌价**. 考虑样模为凸形且满足 1.7.3 的平面拼嵌，证明平面上至少同属三个不同样模的点的数目是有限的，大于或等于 3 且不依赖于 P 的选取；下面以 r 记这个数. 将 P 的顶点顺序记作 $m_1, \cdots, m_r$, 用 α_i 表示含有 m_i 的样模的个数，证明序列 $(\alpha_i)_{i=1,\dots,r}$ 与 P 的选取无关(不计序列倒置或轮换的差别)；称之为拼嵌的价序列. 证明总有

$$\frac{r}{2} - 1 = \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{\alpha_i}$$

(可参照 12.7.2, 12.7.4). 并进而证明: 只有 23 种可能的价序列. 画出价序列为(3, 3, 3, 3, 3,3),(3, 3, 3, 3, 6),(3, 3, 3, 4, 4),(3, 3, 4, 3, 4), (4, 4, 4, 4), (3, 6, 3, 6), (3, 4, 6, 4), (6, 6, 6),(4, 8, 8),(3, 12, 12),(4, 6, 12)的拼嵌样式. 最后证明这些拼嵌不能产生任何别的价序列. 必要时可参见 1.7.7.8.

1.9.14 可以用任意三角形拼嵌平面吗？ 用任意凸四边形呢？ 用任意四边形呢？关于五边形及边数更多的情形，可见 [SC2].

1.9.15 设 $s: 1 \longmapsto 2 \longmapsto 1$ 和 $t: 2 \longmapsto 3 \longmapsto 2$ 是 $\mathfrak{S}_3$ 中两个置换. 证明 $t \circ s$ 是 3 阶的. 从而证明，若 $\mathfrak{S}_3$ 作用于群 G 上，且 G 关于 s 不变 (即 $s(g) = g$)、关于 t 逆不变(即 $t(g) = g^{-1}$), 则必有 $g = g^{-1}$.

参见在 9.5.4.9 中的应用.

1.9.16 证明用图 1.9.16 中的六种样模可以铺嵌平面；证明由这六种样模实现的平面铺嵌不是周期的，也就是说，保持拼嵌整体稳定的平面等距群中不可能含有非平凡的平移. 对这个证明感到困难的读者，或可参考 [RN1], 或可进行下面的工作: 画下六种样

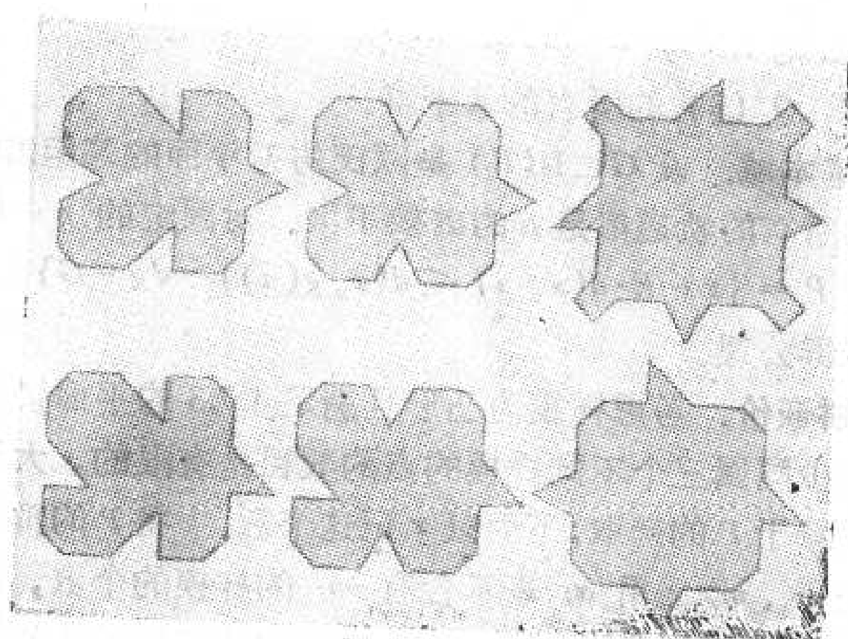


图 1.9.16.

模,然后复印相当数量,再剪下来拼拼看.也可参见第 170 页的图.

第2章 仿射空间

这一章介绍仿射空间，这是本书中用得最多的几何空间。仿射空间就是一个向量空间，我们在其中引进线性变换——平移，从而忘掉0这个点的特殊性。于是，仿射空间、仿射空间的映射、仿射子空间的基本性质，都是线性代数中的性质在某种程度上的翻版。因此，大部分证明都是不言而喻的：凡要证明仿射空间中的一个结论，我们的思路就是通过适当的平移把它化为向量空间中的问题，这样的做法往往也就是把所考虑的空间在某一点向量化。

从第 2.5 节起，几何重又登场，首先是几个很容易的定理：Thalès 定理，Pappus 定理和 Desargues 定理。唯一比较困难而又很有趣的结果，是第 2.6 节中仿射几何的基本定理，它声称：两个仿射空间之间的集合论意义下的映射，若把位于同一直线的点仍变成位于同一直线的点，则它几乎就是仿射映射。

这一章的最后部分讲有限维实仿射空间和一些以后要用到的结果；这些空间，以及它们的仿射群 GA(·)，都有一个标准拓朴。它们具有完全成正比的 Lebesgue 测度。根据测度论，我们将证明 X 的每一紧子集 K 总有一点，即中心，是在任何使 K 整体不变的 X 的自同构下不动的。根据同样的思想，使紧集 K 整体不变的自同构全体构成的 GA(X) 的子群，若内部非空，则必然是紧的；反之，GA(X) 的任一紧子群必含于 X 的关于某点的稳定群之中。

想要知道 2.1 至 2.6 各节证明的细节的读者，可以在 [FL] 中得到满意的答复。

这章里碰到的向量空间都是域上的向量空间。如果同时考虑两个向量空间或仿射空间，它们总是在同一个基域上的，唯一的值得注意的例外是第 2.6 节。

一个很有意思的习题：仔细讨论在哪些地方用到了基域的可

交换性．并且在必要时适当修改讨论的结果．

2.1 定　义

2.1.1 定义． 域K上的一个仿射空间，就是一个群的作用$(\vec{X}, X, \Phi)$，其中$\vec{X}$是K上的向量空间并作为一意、可迁的加群作用在X上．

2.1.2 记号． 置

$$\Phi(\vec{\xi})(x)=x+\vec{\xi};$$

$\Phi(\vec{\xi})$称为X的平移，更确切地说，$\Phi(\vec{\xi})$是沿向量$\vec{\xi}$的平移并记作$t_{\vec{\xi}}$．



图 2.1.1.

我们通常就把仿射空间记为X．有时把$\vec{X}$叫作仿射空间X的底向量空间．

2.1.3 根据1.4.4.1，$(\vec{X}, X, \Phi)$是单可迁的，因而存在一个映射

$$\boxed{\Theta: X\times X\to\vec{X}，\text{也记作}\ (x, y)\longmapsto\overrightarrow{xy}}$$

使得对所有$x, y\in X$有$y=\Phi(\Theta(x, y), x)$．可以把$\overrightarrow{xy}$称为由固定向量$(x, \overrightarrow{xy})$或二点组(x, y)决定的自由向量．

2.1.4 也记

$$\overrightarrow{xy}=y-x,$$

这一点将于3.1.7在某种意义上加以证实．$\vec{X}$作用在X上，从而

$$(x+\vec{\xi})+\vec{\eta}=x+(\vec{\xi}+\vec{\eta})，\text{因此可记作}\ x+\vec{\xi}+\vec{\eta}.$$

特别是，Θ满足：

2.1.5

$$\begin{cases}\forall x\in X: \Theta_x: y\longmapsto\Theta(x,y) \text{ 是双射 } X\to\vec{X},\\ \forall x,y,z\in X: \Theta(x,y)+\Theta(y,z)=\Theta(x,z) \text{ (Chasles 等式)}.\end{cases}$$

事实上我们有 $\Theta_x^{-1}(\vec{\xi})=x+\vec{\xi}$，由此就得出上述两个性质.

2.1.6 等价定义. 设 X 是非空集合，$\vec{X}$ 是 K 上向量空间，若

$$\Theta: X\times X\to\vec{X}$$

使得 $\forall x$ 映射 Θ_x 是双射且 $\Theta(x,y)+\Theta(y,z)=\Theta(x,z)\ \forall x,y,z\in X$，则关于作用 $\Phi(\vec{\xi})(x)=\Theta_x^{-1}(\vec{\xi})$ 而言，X 是一个仿射空间. 反之亦然.

事实上我们可顺次得出：$\Theta(x,x)=0$，$\Theta(y,x)=-\Theta(x,y)$，$\Phi(-\vec{\xi})\circ\Phi(\vec{\xi})=\mathrm{Id}_x$ 和 $\Phi(\vec{\eta})\circ\Phi(\vec{\xi})=\Phi(\vec{\eta}+\vec{\xi})$.

2.1.7 定义. 把 $\vec{X}$ 的维数称为 X 的**维数**，记作 $\dim X=\dim\vec{X}$. 若维数为 0，则 X 是一个**点**；若维数为 1，则称 X 为**仿射直线**；若维数为 2，则称 X 为**仿射平面**.

下面的说明完全证实了定义 2.1.6 的合理性. 我们已知存在双射 $\Theta_x: X\to\vec{X}$，它们满足：

2.1.8 $\Theta_y^{-1}\circ\Theta_x=\Phi(\overrightarrow{xy})$，$\Theta_y\circ\Theta_x^{-1}: z\mapsto z+\overrightarrow{yx}\ \forall x,y\in X$.

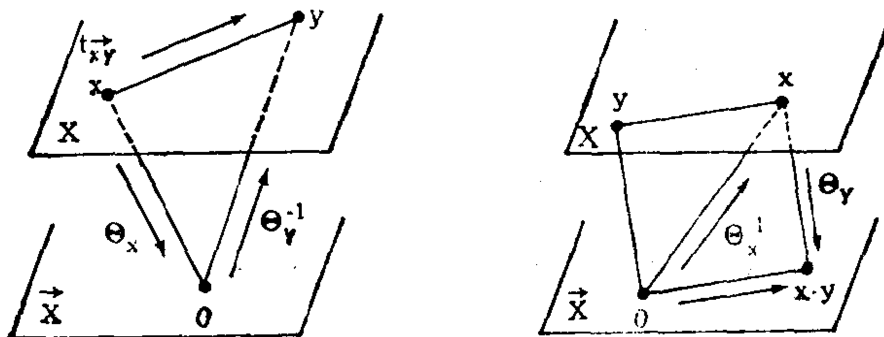


图 2.1.8.

2.1.9 定义. 对 $a\in X$，X_a 表示一个向量空间，它的底集是 X，其上赋有的向量空间结构保证 $\Theta_a: X\to\vec{X}$ 是向量空间的同构. 称 X_a 是 X 在 a 处的**向量化空间**.

2.2 例子，仿射标架

2.2.1 取 $X=\vec{X}$，$\Phi(\vec{\xi})(\vec{\eta})=\vec{\xi}+\vec{\eta}\quad \forall\vec{\xi},\vec{\eta}\in\vec{X}$. 这样就在任一向量空间上得到了一个自然的仿射结构.

2.2.2 若 $(\vec{X},X,\Phi)$，$(\vec{X}',X',\Phi')$ 是两个仿射空间，则 $(\vec{X}\times\vec{X}',X\times X',\Phi\times\Phi')$ 也是仿射空间，这里

$$(\Phi\times\Phi')(\vec{\xi},\vec{\xi}')(x,x')=(\Phi(\vec{\xi})(x),\Phi'(\vec{\xi}')(x')).$$

2.2.3 设 E 是向量空间，F 是 E 的向量子空间，X 是 F 所决定的等价关系的一个等价类，则对于 $\Phi(f)(x)=x+f$，$x\in X$，$f\in F$ 来说 (F,X,Φ) 自然地成为一个仿射空间. 这里要注意（这正是仿射空间记法的长处所在），与 2.2.1 的特殊情况不同，集 X 并不象 $\vec{X}$ 有原点 0 那样具有"特殊的"点. 因为当 F 是 X 的超平面时，给定 X 的一点就等价于给定 F 在 E 中的补集；而一般说来，并不存在"自然"补集，一个从更抽象的角度说明这一点的例子在第 2.2.5 节中. 这种 X 的一个特殊情形是线性方程组

$$\sum_j a_{ij}x_j=\ b_i(i=1,\cdots,k)$$

的解集合，事实上它可以看作某个适当的线性映射下的逆象 $f^{-1}(B)$，从而是子空间 $F=f^{-1}(0)$，即 f 的核的等价类.

2.2.4 设 $(\vec{X},X,\Phi)$ 是仿射空间，$\vec{S}\subset\vec{X}$ 是向量子空间. 这时在 X 中定义了一个等价关系

$$\mathscr{R}(\vec{S}):x\mathscr{R}x'\Longleftrightarrow\overrightarrow{xx'}\in\vec{S}.$$

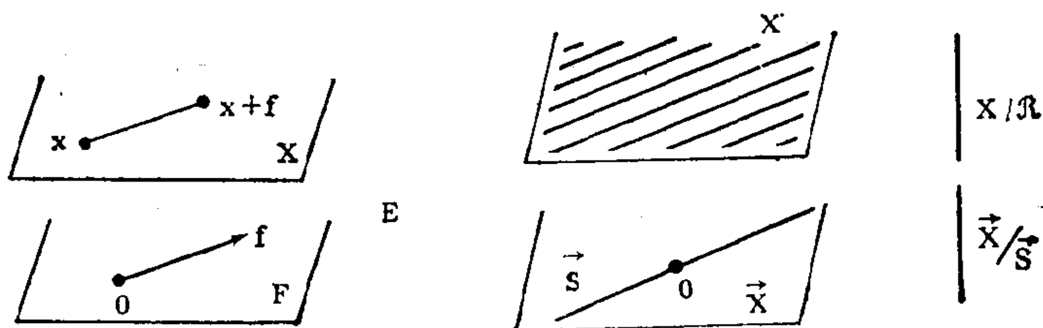


图 2.2.3.　　图 2.2.4.

于是 $(\vec{X}/\hat{S}, X/\mathscr{R}, \Phi)$很自然地是一个仿射空间，这里$\Phi$是由向商空间的投影来定义的． 在 2.4.1 中我们会看到什么是等价类．

2.2.5 设E是向量空间，H是它的一个超平面；置

$$\boxed{E_H = \{W : H\text{在}E\text{中的补子空间}\}.}$$

注意到W都是向量直线；利用 1.2.5 的记号，可以写成

$$E_H = G_{E,1} \backslash G_{H,1}.$$

因而：

2.2.6 命题．在 E_H 上存在自然的仿射空间结构，其底向量空间是 $\vec{E}_H = L(E/H; H)$（对两个向量空间，我们用 $L(\cdot;\cdot)$ 表示从一个到另一个的线性映射全体的集合）．

注意到 $\dim E/H = 1$，就有

$$\dim \vec{E}_H = \dim H = \dim E - 1.$$

为要定义 $\Theta: E_H \times E_H \to L(E/H; H)$，设 $W, W' \in E_H$，$\alpha \in E/H$．若 $p: E \to E/H$ 是标准投影，则 $p^{-1}(\alpha)$ 是E的仿射超平面(参见 2.2.3)；我们知道，p 限制在H的任一补集上时，是一个同构，因而可令：

$$\Theta(W, W')(\alpha) = (p|W')^{-1}(\alpha) - (p|W)^{-1}(\alpha) \in H;$$

(图 2.2.5 中：$w' = (p|W')^{-1}(\alpha)$，$w = (p|W)^{-1}(\alpha)$)．可直接验证Θ满足公理 2.1.1(或 2.1.5)．

2.2.5 和 2.2.6 在 5.1 节中是很重要的．另外，很自然地我们会要找出 2.2.3 和 2.2.6 的联系（图 2.2.3 和 2.2.5）．由此得出下述命

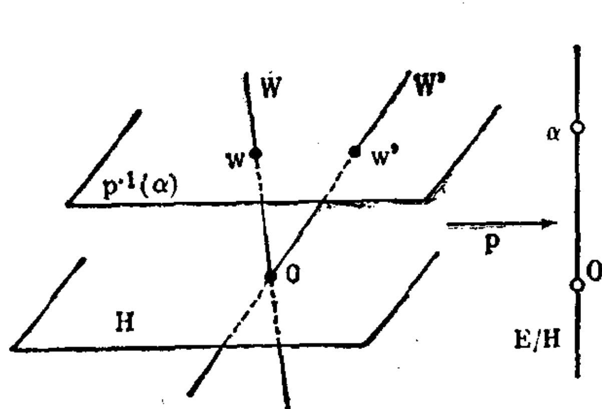


图 2.2.5.

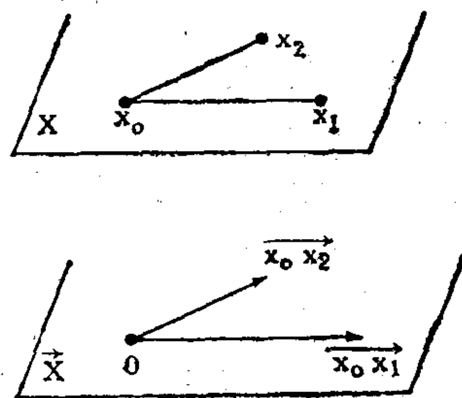


图 2.2.9.

题，它的证明留给读者去完成，其中仿射空间同构的概念将在第2.3节中定义。

2.2.7 命题. 设E是向量空间，H是E的超平面，X是关于H的一个等价类，则E_H和X作为仿射空间，在映射

$$E_H \ni W \longmapsto W \cap X \in X$$

下是自然同构的。

2.2.8 为了在仿射空间中进行计算，我们把向量空间的基加以推广。习惯上，

我们只在有限维空间中谈仿射标架。

2.2.9 定义. 仿射空间X的(仿射)标架，就是给定X的 $d+1$ 个点 $\{x_i\}_{i=0,1,\cdots,d}$，使 $\{\overrightarrow{x_0 x_i}\}_{i=1,\cdots,d}$ 是$\vec{X}$的基(因而必须有$d=\dim X$)。$x\in X$ 在这标架中的坐标，就是使 $\overrightarrow{x_0x} = \sum_i \lambda_i \overrightarrow{x_0x_i}$ 的

$$\{\lambda_i\}_{i=1,\cdots,n},$$

也就是$\overrightarrow{x_0x}$在$\vec{X}$的基 $\{x_0x_i\}_{i=1,\cdots,d}$ 中的坐标。我们可以写

$$x=(\lambda_1,\cdots,\lambda_d).$$

2.2.10 注. 可以等价地说成 $\{x_i\}_{i=1,\cdots,d}$ 是向量化空间 X_{x_0} 的基(参见2.1.9)；或者还可说成 $\{x_0, x_1,\cdots, x_d\}$ 是X的单形；参见2.4.7。

2.3 仿射空间的态射

设 $(\vec{X}, X, \Theta)$，$(\vec{X}', X', \Theta')$ 是(在同一域上的)两个仿射空间(参见0.2)，$f:X\to X'$ 是(在集合论意义下给定的)映射。

2.3.1 命题. 对 $f:X\to X'$，下列条件是等价的：

(i) $\exists a\in X \mid f\in L(X_a;\ X'_{f(a)})$；

(ii) $\forall a\in X: f\in L(X_a;\ X'_{f(a)})$；

(iii) $\exists a\in X \mid \Theta'_{f(a)}\circ f\circ\Theta_a^{-1}\in L(\vec{X};\ \vec{X}')$；

(iv) $\forall a\in X: \Theta'_{f(a)}\circ f\circ\Theta_a^{-1}\in L(\vec{X};\ \vec{X}')$。

而且，$\Theta'_{f(a)}\circ f\circ\Theta_a^{-1}$ 从而仅与 f 有关；将该映射记为 $\vec{f}$ 或 $L(f)$. 于是 $\vec{f}\circ\Theta=\Theta'\circ(f\times f)$. 满足上述等价条件之一的映射称为从 X 到 X' 中的(仿射空间的)态射或仿射映射. 态射的集合记为 $A(X;X')$. 若 f 同时还是双射，则称 f 是(仿射空间的)同构；若 f 是双射且 $X=X'$,则称为 X 的自同构.

$$X_a \xrightarrow{f} X'_{f(a)}$$

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & X' \\ \Theta_a\downarrow & & \downarrow\Theta'_{f(a)} \\ \vec{X} & \xrightarrow{\vec{f}} & \vec{X}' \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} X\times X & \xrightarrow{f\times f} & X'\times X' \\ \Theta\downarrow & & \downarrow\Theta' \\ \vec{X} & \xrightarrow{\vec{f}} & \vec{X}' \end{array}$$

2.3.2 附注. 对于仿射映射,对所有的 $x,y\in X$ 有:

$$\boxed{\overrightarrow{f(x)f(y)}=\vec{f}(\overrightarrow{xy}),\ f(y)=f(x)+\vec{f}(\overrightarrow{xy}).}$$

此中含义是颇有启发性的：f 由平移和线性映射组成.

2.3.3 例

2.3.3.1 若 $X=X'=\mathbf{R}$，我们就有熟识的映射

$$x\longmapsto ax+b,\ a,b\in\mathbf{R}.$$

2.3.3.2 常值映射 f 必为仿射的,而且 $\vec{f}=0$. 反之，若 f 是仿射映射而 $\vec{f}=0$，则 f 是常值映射.

2.3.3.3 若 $f=\mathrm{Id}_X$，则 $\vec{f}=\mathrm{Id}_{\vec{X}}$ (而且 f 是仿射映射!). 反过来的情况,请见下文.

2.3.3.4 若 $f\in A(X;X'), g\in A(X';X'')$,则 $g\circ f\subset A(X;X'')$ 且 $\overrightarrow{g\circ f}=\vec{g}\circ\vec{f}$. 特别是

$$\mathrm{GA}(X)=A(X;X)\cap\mathfrak{S}_X$$

在合成运算下成群，称为 X 的仿射群. 我们有同态

$$L:\mathrm{GA}(X)\ni f\longmapsto\vec{f}=L(f)\in\mathrm{GL}(\vec{X})$$

(其中 $\mathrm{GL}(\vec{X})=L(\vec{X};\vec{X})\cap\mathfrak{S}_X$ 是 $\vec{X}$ 的线性群). L 的核，即 $L^{-1}(\mathrm{Id}_{\vec{X}})$，自然就是 $\vec{X}$,即 X 的平移的全体(参见 2.1.2);以后我们把它记作

$$\mathrm{Ker}L=T(X);$$

这是 $\mathrm{GA}(X)$ 的正规子群.

2.3.3.5 仿射群在仿射标架上是单可迁的．这一点譬如说可以这么看出：若 $\{x_i\}_{i=0,\cdots,d}$，$\{x'_i\}_{i=0,\cdots,d}$ 是 X 和 X' 的仿射标架，则唯一存在 $f\in A(X,X')$ 使

$$f(x_i)=x'_i\ \forall_i=0,\cdots,d.$$

2.3.3.6 更有理由说，X 是关于群 $\mathrm{GA}(X)$（比在 2.1.1 中定义 X 的群 $\vec{X}=T(X)$ 更大）的齐性空间．将 $a\in X$ 在 $\mathrm{GA}(X)$ 中的稳定群记作 $\mathrm{GA}_a(X)$．于是(参见 1.5.5)在集论意义下有

$$X\cong \mathrm{GA}(X)/\mathrm{GA}_a(X),$$

而且限制 $L:\mathrm{GA}_a(X)\to \mathrm{GL}(X)$ 是群同构．为详细说明怎样从 $T(X)$ 和 $\mathrm{GA}_a(X)$ 出发得到 $\mathrm{GA}(X)$，我们引进：

2.3.3.7 定义． 群 G 称为其子群 H 与 K 的半直积，如果

$$G=H\cdot K=\{hk:h\in H,k\in K\},\ H\cap K=\{e\},$$

且 H 为正规子群．

可以知道，写法 $g=hk$ 是唯一的；也可写成 $G=K\cdot H$，元素乘积写法也是唯一的，但若 $g=hk=k'h$，一般 $k\neq k'$．

2.3.3.8 命题． 对 $a\in X$，我们有半直积

$$\mathrm{GA}(X)=T(X)\mathrm{GA}_a(X).$$

所要找的从 $\mathrm{GA}(X)$ 到 $T(X)\times \mathrm{GA}_a(X)$ 中的映射(参见 2.1.2)当然就是 $f\longmapsto (t_{\overrightarrow{f(a)a}},\ t_{\overrightarrow{f(a)a}}\circ f)$.

2.3.3.9 对任何 $a\in X,\lambda\in K^*=K\backslash 0$，以 a 为中心、以 λ 为比率的位似，记成 $H_{a,\lambda}$，就是映射 $H_{a,\lambda}:x\mapsto a+\lambda\overrightarrow{ax}$．

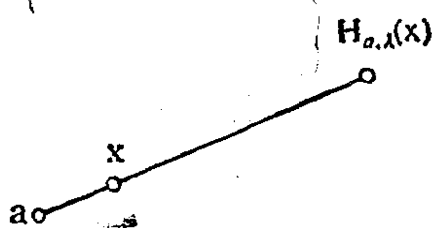


图 2.3.3.9.

这是一个仿射映射，且有 $\vec{H}_{a,\lambda}=\lambda\mathrm{Id}_{\vec{X}}$（应用 2.3.2）．参看第 170 页的例子．这里 K 的可交换性起了重要作用．反过来：

2.3.3.10 命题． 设 $f\in\mathrm{GA}(X)$ 使 $\vec{f}=\lambda\mathrm{Id}_{\vec{X}}$，且 $\lambda\in K\backslash 1$，则唯一存在 a 使 $f=H_{a,\lambda}$．

为证明 2.3.3.10，如同在证明大部分一般性的仿射空间的结果

时一样，我们把空间向量化．现在任取 $b\in X$，在向量空间 X_b 中计算；我们要找 $f(a)=a$，根据 2.3.2 有 $a=f(b)+\lambda(a-b)$，由此得出唯一的解

$$a=\frac{1}{1-\lambda}(f(b)-\lambda b).$$

2.3.3.11

$$\boxed{H_{a,\lambda}\circ H_{a,\mu}=H_{a,\lambda\mu}\ \forall a\in X\ \forall\lambda,\ \mu\in K.}$$

如果 $\lambda=1$，不能再用 2.3.3.10，但这时我们知道(参见 2.3.3.4) f 是平移．为把 f 划一地表为 $\vec{f}=\lambda\mathrm{Id}_{\vec{X}}$, $\lambda\in K^*$，我们引进：

2.3.3.12 命题．定义． $\mathrm{GL}(\vec{X})$ 的中心是 $K^*\mathrm{Id}_{\vec{X}}$．其逆象是 $\mathrm{GA}(X)$ 的正规子群，记为 $\mathrm{Dil}(X)=L^{-1}(K^*\mathrm{Id}_{\vec{X}})$；它是 $T(X)$ 和所有 $H_{a,\lambda}(a\in X,\ \lambda\in K^*\backslash 1)$ 在集合论意义下的和，$T(X)$ 是 $\mathrm{Dil}(X)$ 的正规子群．$\mathrm{Dil}(X)$ 的元素全体，称为 X 的**扩张**．

关于 $\mathrm{GL}(\vec{X})$ 的中心，参见 2.8.4 (要用到 8.2.16 的思想)．扩张的几何特征将在 2.5.6 中作充分的描述．

2.3.4 在 $A(X;X')$ 上可以自然地加上什么结构——如同 $L(X;X')$ 自然地是向量空间那样吗？有兴趣的读者在 [FL] 可以看到怎么在 $A(X;X')$ 上构造一个自然的仿射空间结构，其维数为

$$\dim A(X;X')=(\dim X+1)\dim X'.$$

在 2.3.9 中可以看到这个维数是合理的．

2.3.5 考虑两个象 2.2.5 中那样的集族，即设 E, E' 是两个向量空间，H, H' 分别是 E, E' 的超平面，引进相应的仿射空间

$$X=E_H,\ X'=E'_{H'};$$

设 $f\in L(E;E')$；由此可以推断有一个态射 $f:X\to X'$ 吗？要使 W 是跟 H 相补的向量直线，必须要 $f(W)$ 的维数仍为 1 且仍穿过 H'．这一点可由 2.3.6 引进的集合确切地得到保证．

2.3.6

$$L_{H,H'}(E;E')=\{f\in L(E;E'):f(H)\subset H'$$
$$\text{且}\ \underline{f}:E/H\to E'/H'\ \text{是单射}\},$$

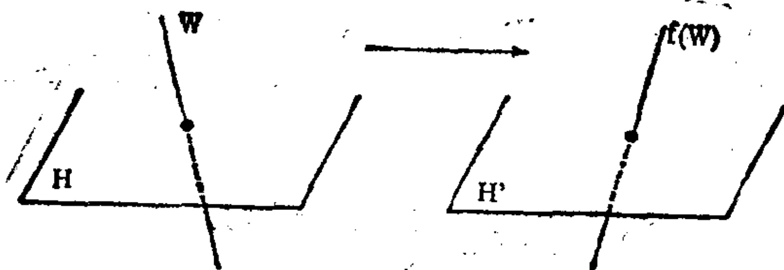


图 2.3.5.

其中 $\underline{f} \in L(E/H; E'/H')$ 是由 f 通过商空间投影得出的，$f(H) \subset H'$ 恰好使这一做法可行．于是就有 $f(W) \in E'_{H'}$ $\forall W \in E_H$；把这样定义的映射记作 $\bar{f}: E_H \to E'_{H'}$．我们可以直接证明

2.3.7 命题． 若 $f \in L_{H,H'}(E; E')$，则 $\bar{f} \in A(X; X')$；映射

$$L(\bar{f}) = \vec{f} \in L(L(E/H; H);\ L(E'/H'; H'))$$

就是

$$\eta \longmapsto f \circ \eta \circ \underline{f}^{-1}.$$

另外，$\bar{f} = \bar{g}$ 当且仅当存在 $k \in K^*$ 使 $g = kf$.

2.3.7 的逆命题参见 3.2.1 和 5.1.3．至于 2.3.7 的意义，则可见第 5 章．

$$\begin{array}{ccc} E/H & \xrightarrow{\underline{f}} & E'/H' \\ \eta\downarrow & \subset & \downarrow \\ H & \xrightarrow[f|H]{} & H' \end{array}$$

2.3.8 态射在标架中的计算．

设 $f \in A(X; X')$，$\{x_i\}_{i=0,1,\cdots,n}$，$\{x'_j\}_{j=0,1,\cdots,p}$ 是 X，X' 的标架；令 $e_i = \overrightarrow{x_0x_i}$，$e'_j = \overrightarrow{x'_0x'_j}$，引进 $\vec{f}$ 相应的矩阵：

$$M(\vec{f}) = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots\cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{p1} & \cdots\cdots & \alpha_{pn} \end{pmatrix}.$$

根据 2.3.2，若 $x = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$：

$$f(x) = f(x_0) + \vec{f}(\overrightarrow{x_0x}) = f(x_0) + \vec{f}\left(\sum_i \lambda_i e_i\right).$$

若 $f(x)=(\lambda'_1,\cdots,\lambda'_p)$，我们写 $\overrightarrow{x'_0 f(x_0)}=\sum_j a_j e'_j$，这里

$$\lambda'_j = a_j + \sum_k \alpha_{jk}\lambda_k;$$

换言之，

$$f(x)=\left(a_1+\sum_i \alpha_{1i}\lambda_i,\cdots,a_p+\sum_i \alpha_{pi}\lambda_i\right).$$

我们注意到，用下面的矩阵乘积也能得出同样的结果：

2.3.9

$$\begin{pmatrix}1\\ \lambda'_1\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ \lambda'_p\end{pmatrix}=M(f)\begin{pmatrix}1\\ \lambda_1\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ \lambda_n\end{pmatrix}, \text{ 其中我们置 } M(f)=\begin{pmatrix}1 & 0 \dots 0\\ a_1 & \\ \cdot & \\ \cdot & M(\vec{f})\\ \cdot & \\ a_p & \end{pmatrix}.$$

这就为所有的问题提供了实用的计算方法，譬如说计算 $f\in A(X;X')$ 和 $g\in A(X';X'')$ 的合成 $g\circ f$. 深入的解释将在 3.2.5 给出. 最后，我们看到，$A(X;X')$ 的维数是 $M(f)$ 中参数的数目，也就是 $p+pn=p(n+1)=\dim X'(\dim X+1)$ (参见 2.3.4).

2.4 仿射子空间

仿射子空间是几何中最早引进的对象：平面上的直线，空间的直线和平面. 从数学角度说，我们现在的做法则是在讲子空间之前先引进了态射的概念.

2.4.1 定义. 命题. 设 X 是仿射空间，Y 是 X 的非空子集，则下列条件等价：

$\exists a\in Y\,|\,\Theta_a(Y)$ 是 $\vec{X}$ 的向量子空间；

$\forall a\in Y:\Theta_a(Y)$ 是 $\vec{X}$ 的向量子空间；

$\exists a \in Y \mid Y$ 是 X_a 的向量子空间；

$\forall a \in Y : Y$ 是 X_a 的向量子空间；

$\exists a \in X$ 和向量子空间 $\vec{V} \subset \vec{X}$，使 $Y = a + \vec{V}$.

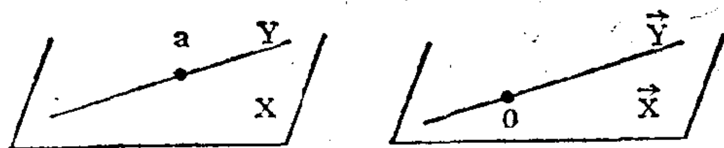


图 2.4.1.

满足上述条件之一的 Y 称为 X 的仿射子空间或子空间. 向量空间 $\Theta(Y \times Y) = \Theta_a(Y) = \vec{V}(\forall a \in Y)$ 称为 Y 的方向，记作 $\vec{Y}$. 另外 $(\vec{Y}, Y, \Theta|_{Y\times Y})$ 是仿射空间；而且单射 $i: Y \to X$ 属于 $A(Y; X)$. Y 的维数是上述自然形成的仿射空间的维数.

第五个条件反映了仿射空间的非内在特征：它们跟向量空间就差一个平移(参见 2.3.2).

2.4.2 例

2.4.2.1 X 的 0 维子空间就是 X 的点. 1 维(或 2 维)子空间称为 X 的仿射直线(或仿射平面)，或者就称作直线和平面. 以 $\vec{X}$ 的超平面作为方向的子空间也称作 X 的(仿射)超平面.

2.4.2.2 设 $f \in A(X; X')$，Y 是 X 的子空间，Y' 是 X' 的子空间；则 $f(Y)$ (只要非空) 是 X' 的子空间，$f^{-1}(Y')$ (只要非空)是 X 的子空间. 另外，$\overrightarrow{f(Y)} = \vec{f}(\vec{Y})$，$\overrightarrow{f^{-1}(Y')} = (\vec{f})^{-1}(\vec{Y}')$.

2.4.2.3 在 E_H 中(参见 2.2.5)，E_H 的仿射子空间 Y 和 E 的向量子空间 $\hat{Y}$ 之间存在一个双射的对应，其中 $\hat{Y}$ 是由 $\bigcup_{W \subset Y} W$ 生成的 E 的向量子空间；注意到

$$\dim \hat{Y} = \dim Y - 1,$$

且 $\vec{Y} = L(E/H; \hat{Y} \cap H)$. 相仿地，对例 2.2.3 来说，在 X 的子空间 Y 和 $\hat{Y}$ 之间存在一个双射，其中 $\hat{Y}$ 是由 Y 生成的 E 的向量子空间；因而 $\vec{Y} = \hat{Y} \cap F$.

2.4.2.4 设 $(Y_i)_{i \in I}$ 是 X 的任意一族子空间，则或者

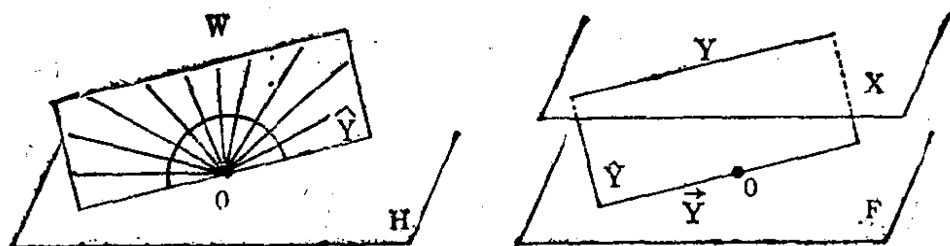


图 2.4.2.3.

$$\bigcap_i Y_i = \varnothing\text{，或者}\bigcap_i Y_i$$

是子空间；从而 $\overrightarrow{\bigcap_i Y_i} = \bigcap_i \vec{Y}_i$.

由此可得出经典的

2.4.2.5 命题. 设 $S \subset X$ 是仿射空间 X 的任一非空子集. 必存在一个包含 S 的最小的子空间，称作由 S 生成的子空间，记作 $\langle S \rangle$. 它也是所有包含 S 的子空间的交.

2.4.2.6 我们还看到（若 $\dim X = d < \infty$），X 中 $d+1$ 个点的集合 $\{x_i\}_{i=0,\cdots,d}$ 是仿射标架的充要条件是

$$\langle x_0, x_1, \cdots, x_d \rangle = X.$$

2.4.3 定义. 命题. X 的点 $\{e_i\}_{i=0,\cdots,k}$ 称为（仿射）独立的，如果 $\dim\langle e_0, \cdots, e_k \rangle = k$. $\{e_i\}_{i=0,\cdots,k}$ 独立的充要条件是对所有的 $i = 0, \cdots, k$, $e_i \notin \langle e_0, \cdots, e_{i-1}, e_{i+1}, \cdots, e_k \rangle$.

2.4.4 举例: 两点 x, y 是独立的当且仅当 $x \neq y$. 它们决定一条包含这两点的唯一的直线: $\langle x, y \rangle$. 这样我们就有古老的欧几里得公理: 过不同的两点可作且仅可作一条直线.

2.4.5 命题. 设 X 是特征数 $\neq 2$ 的域上的仿射空间. 当且仅当对所有的 $x, y \in Y$ 有 $\langle x, y \rangle \subset Y$ 时，X 的非空子集 Y 成为 X 的子空间.

这里也涉及一个古老的公理: 空间中的一个平面是空间的一个子集，它包含其中任意两点的连线. 但若域的特征数是 2，则 2.4.5 不成立. 为证明 2.4.5，我们将 X 在 $0 \in Y$ 处向量化，然后在 X_0 中计算: 对所有 $x, y \in Y$:

$$\langle 0, x\rangle = Kx \subset Y,$$

且 $x+y \in \left\langle 0, \frac{x+y}{2}\right\rangle \subset Y$.

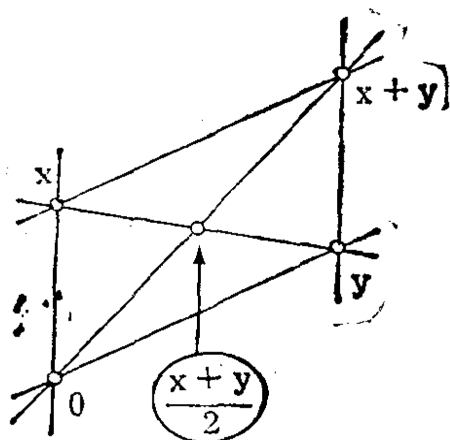


图 2.4.5.

2.4.6 附注. 设 a, b, c 是共线的三点（即有一直线包含这三点），$a \neq b$，则我们有

$$\frac{\overrightarrow{ac}}{\overrightarrow{ab}} \in K.$$

2.4.7 单形. d 维（有限）仿射空间 X 中 $d+1$ 个独立的点的集合，称为 X 的单形. $d=2$ 时称为三角形；$d=3$ 时称为四面体. 三角形 $\{x, y, z\}$ 的三条直线 $\langle x, y\rangle$, $\langle y, z\rangle$, $\langle z, x\rangle$ 称为它的边. 四面体 $\{x, y, z, t\}$ 的棱是直线 $\langle x, y\rangle$, $\langle x, z\rangle$, $\langle x, t\rangle$, $\langle y, z\rangle$, $\langle y, t\rangle$, $\langle z, t\rangle$；它的面是平面 $\langle x, y, z\rangle$, $\langle y, z, t\rangle$, $\langle z, t, x\rangle$, $\langle t, x, y\rangle$；有时也把任意维的 X 中的三个独立的点称为三角形.

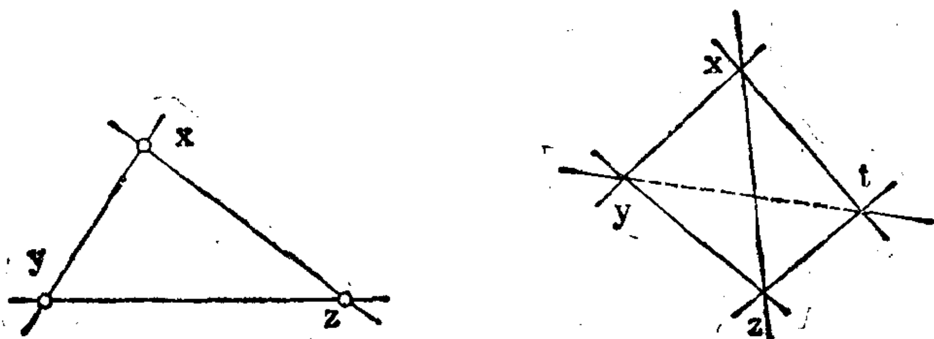


图 2.4.7.

2.4.8 解析几何：子空间的方程. 问题在于要如 2.3.8 那样有一些工具，来计算与子空间有关的所有问题. 注意现在

$$\dim X = d < \infty$$

(参见 2.2.8).

2.4.8.1 线性代数的复习. 设 E 是 d 维向量空间；其对偶空间 E^* 也是 d 维的. 设 F 是 E 的任意子集，$[F]$ 是由 F 生成的 E 的向量子空间. 记

$$F^{\perp} = \{f \in E^* : f(F) = 0\}$$

为 F 在 E^* 中的正交集；于是 $F^{\perp} = [F]^{\perp}$ 且

$$\dim[F] + \dim F^{\perp} = d.$$

对 E^* 的子集 S，仍用 $S^{\perp}$ 记它在 E 中的正交集：

$$S^{\perp} = \{x \in E : f(x) = 0 \quad \forall f \in S\};$$

于是 $[S]^{\perp} = S^{\perp}$ 且 $\dim S^{\perp} + \dim[S] = d$. 若 F 和 F' 是 E 的向量子空间，S 是 E^* 的向量子空间，则总有：

$$F^{\perp\perp} = F,\ S^{\perp\perp} = S,\ (F \cap F')^{\perp} = F^{\perp} + F'^{\perp},$$

$$(F + F')^{\perp} = F^{\perp} \cap F'^{\perp}.$$

对 $\dim X$ 无限的情形，有兴趣的读者可参看 [BI5]，第 II 章，§2.

2.4.8.2 推论. 设 $H \subset E$ 是超平面；则 $\exists f \in E^* \backslash 0$ 使 $H = f^{-1}(0)$，而且若 $H = f^{-1}(0) = g^{-1}(0)$，$f, g \in E^*$，则必有 $g = \lambda f$，$\lambda \in K^*$. $F \subset E$ 是 p 维向量子空间的充要条件是存在线性独立的 $f_1, \cdots, f_{d-p} \in E^*$ 使 $F = \bigcap_{i=1}^{d-p} f_i^{-1}(0)$.

下面我们可以转入仿射空间的情形；我们预先指出，非零常数仿射形式的核是空的(线性形式则不然，这时 0 总是属于核的!).

2.4.8.3 定义. 仿射空间 X 上的仿射形式，就是 $f \in A(X;K)$，其中 K 上赋有自然的仿射结构(参见 2.2.1). 我们将赋予 $A(X;K)$ 典型的向量空间结构.

2.4.8.4 例如，若 $\{x_i\}_{i=0,\cdots,d}$ 是 X 的一个基，则所有的仿射形式总可唯一地写为

$$x = (\lambda_1, \cdots, \lambda_d) \longmapsto f(x) = a + \sum_i \alpha_i \lambda_i$$

(参见 2.3.8). 常数是仿射形式,若该常数不为 0,则 $f^{-1}(0) = \varnothing$.

2.4.8.5 命题. 设 X 是 d 维仿射空间, V 是 X 的非空子集, 则 V 是 X 的 p 维仿射子空间的充要条件是存在 $d-p$ 维向量子空间 $V' \subset A(X; K)$, 使 $V = V'^{\perp} = \{x \in X : f(x) = 0\ \forall f \in V'\}$ 且 $1 \notin V'$ (这里沿用习惯的记法, 用 1 表示常数仿射形式 $x \longmapsto 1$ $\forall x \in X$).

将 X 在 $a \in V$ 向量化,然后考察 X_a. 必要性是显然的, 因为由 $1(x) = 1 \neq 0\ \forall x$ 有 $1 \notin V'$. 充分性要困难些:所要证明的其实就是 $V'^{\perp} \neq \varnothing$, 因为这时,如同证必要性时一样, 对 $E = X_a$ 用 2.4.8.1 就得出结论. 我们现在对 $k = \dim V'$ 用归纳法; $k = 0$ 时显然成立. 设 $\{f_1, \cdots, f_k\}$ 是 V' 的一个基,

$$V_1' = Kf_1 + \cdots + Kf_{k-1};$$

由归纳假设 $V_1 = V_1'^{\perp} \neq \varnothing$, 只要再证明 $f_k | V_1$ 不是非零常数即可. 用反证法: 假设 f_k 在 V_1 上是常数,则

$$\overrightarrow{f_k(x_0) f_k(x)} = \vec{f}_k(\overrightarrow{x_0 x}) = 0 \quad \forall x_0, x \in V_1.$$

取 $\vec{V}_1$, $\vec{V}_1^{\perp} = K\vec{f}_1 + \cdots + K\vec{f}_{k-1}$, 则有

$$\vec{f}_k = \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i \vec{f}_i,$$

由于 $f_k(x_0) = 0$ 时有 $f_i(x_0) = 0$, 从而有

$$f_k(x) = f_k(x_0) + \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i f_i(x) \quad \forall x \in X.$$

2.4.8.6 例. 最重要的例子是超平面的情形: 若

$$\dim H = p = d - 1,$$

则从 2.4.8.5 清楚地看到, 存在仿射形式 $f \in A(X; K)$ 使 $H = f^{-1}(0)$, 而且反过来, 若 f 是非常数仿射形式, 则 $f^{-1}(0)$ 是超平面,最后就知道

$$f^{-1}(0) = g^{-1}(0)$$

等价于 $f = kg$, $k \in K^*$.

最常见的实用情况是 $K=\mathbf{R}$, $d=2$ 或 3,这就是我们日常生活的情形. 例如, $d=3$ 时, X 中的平面 Y 在任一标架下总可写成

$$Y=\{(x, y, z): ax+by+cz+d=0\},$$

其中四实数 a, b, c, d 满足唯一的条件: a, b, c 不同时为零. 在同一个 X 中,直线 D 写成:

$$D=\{(x, y, z): ax+by+cz+d = a'x+b'y+c'z+d'=0\},$$

其中两组 (a, b, c),(a', b', c') 应都是非零数组且不成比例.

2.4.8.7 参数表示. 我们通过 Y 的一个标架 $\{x_i\}_{i=0,\cdots,k}$ 给出 X 的 k 维子空间 Y:

$$Y=\left\{x_0+\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\overrightarrow{x_0x_i}: \lambda_i\in K \quad \forall i=1,\cdots,k\right\}.$$

这样,$\mathbf{R}^3$ 中的直线就是

$$\{(a+\lambda b, a'+\lambda b', a''+\lambda b''): \lambda\in\mathbf{R}\},$$

平面就是

$$\{(a+\lambda b+\mu c, a'+\lambda b'+\mu c', a''+\lambda b''+\mu c''): \lambda, \mu\in\mathbf{R}\}.$$

2.4.8.8 关于(向量、仿射、射影)子空间的计算,一个重要的工具是"Grassmann 坐标",参见 [HO-PE], 第 VII 章.

2.4.9 子空间的平行与相交

2.4.9.1 定义. 仿射空间 X 的两个子空间 S, T 称作:

——平行的,如果 $\vec{S}=\vec{T}$, 记作 $S/\!/T$;

——弱平行的,如果 $\vec{S}\subset\vec{T}$, 记作 $S\lhd T$.

我们看到,$\cdot/\!/\cdot$ 是等价关系,$\cdot\lhd\cdot$ 是半序关系. 为了说明在考虑平面上的直线以及空间(即 3 维空间)中的直线和平面这两种情形时,上述的定义是跟欧氏几何的定义等价的,先得讨论一下子空间相交时的性质.

2.4.9.2 命题. 若 $S/\!/T$, 则 $S=T$ 或 $S\cap T=\varnothing$. 若 $S\lhd T$, 则 $S\cap T=\varnothing$ 或 $S\subset T$. $S\lhd T$ 的充要条件是存在 T 的子空间 S' 使 $S/\!/S'$. 设 $x\in X$ 而且 S 是子空间,则存在唯一的

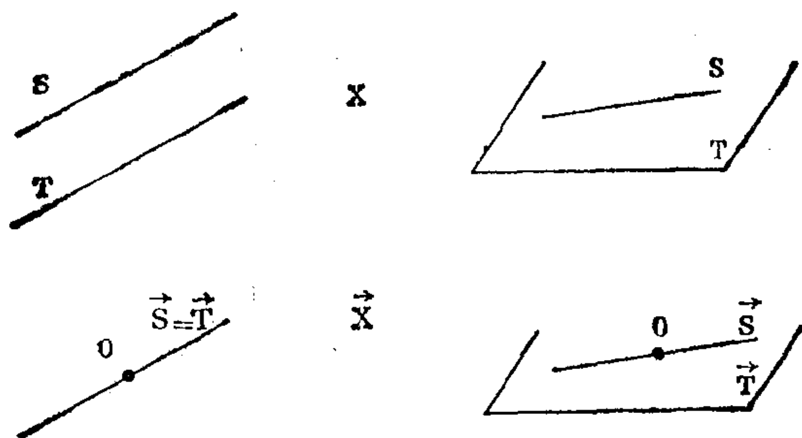


图 2.4.9.1.

子空间T使 $S/\!/T$ 而且 $x\in T$. 设 S, T 是X的两个子空间,则

(i) $S\cap T=\varnothing$时:

$$\dim S+\dim T<\dim X+\dim(\vec{S}+\vec{T}),$$

而且

$$\dim\langle S\cup T\rangle=\dim(\vec{S}+\vec{T})+1=\dim S+\dim T+1-\dim(\vec{S}\cap\vec{T}).$$

(ii) $S\cap T\neq\varnothing$ 时,

$$\dim\langle S\cup T\rangle=\dim S+\dim T-\dim(S\cap T).$$

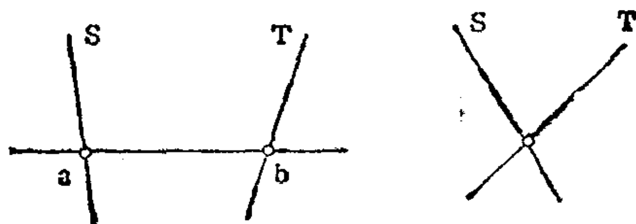


图 2.4.9.2.

由 Grassmann 等式和下面的引理直接就可证得命题. 这里,所谓 Grassmann 等式

$$\dim\vec{S}+\dim\vec{T}=\dim(\vec{S}+\vec{T})+\dim(\vec{S}\cap\vec{T})$$

适用于一个向量空间的任何两个向量子空间.

2.4.9.3 引理. 设 $a\in S$, $b\in T$, 则 $S\cap T\neq\varnothing$ 等价于 $\overrightarrow{ab}\in\vec{S}+\vec{T}$.

引用 X_a (参见 2.1.9)即可证得引理. 另外还可看出

$$\overrightarrow{\langle S\cup T\rangle}=\vec{S}+\vec{T}+K\cdot\overrightarrow{ab}.$$

2.4.9.4 推论. 若 $\vec{S}$ 和 $\vec{T}$ 是互补的，即 $\vec{X}=\vec{S}\oplus\vec{T}$，则 $S\cap T$ 只含一点. 这时称子空间 S 和 T 是互补的.

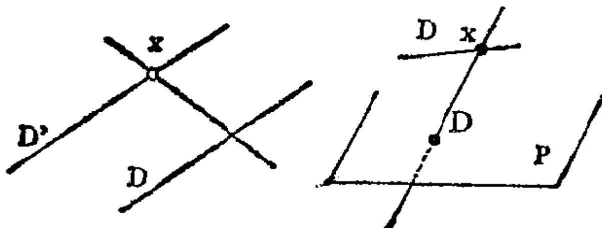


图 2.4.9.4.

2.4.9.5 例. 若 X 是平面，D 是其上直线且 $x\notin D$，则 X 上唯一地存在直线 D' 含有 x 并使 $D\cap D'=\emptyset$；这也就是使 $D'/\!/D$ 的直线. 这样，我们就又得到了著名的欧氏公设，这里的平行概念是定义为一种不相交性的. $d=3$ 时，对于一条直线 D 和一个平面 P 来说，有三种可能：或 $D\subset P$，或 $D\cap P$ 只含一点，或 $D\cap P=\emptyset$；在最后一种情形时，$D\triangleleft P$.

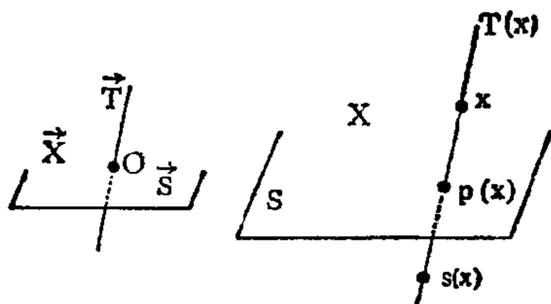


图 2.4.9.5.

2.4.9.6 射影和对称. 设 X 是仿射空间，S 是子空间，$\vec{T}$ 是 $\vec{S}$ 在 $\vec{X}$ 中的补空间，则由 2.4.9.2 和 2.4.9.4，对每一 $x\in X$，唯一地存在以 $\vec{T}$ 为方向的子空间 $T(x)$，而且 $S\cap T(x)$ 只含一点；以 $p(x)$ 来记这一点，我们就得到一个映射 $p:X\ni x\longmapsto p(x)\in S$，称为 X 在 S 上的平行于 T 的射影. 我们记为 $p\in A(X;S)$. 所谓平行于 $\vec{T}$ 的、关于 S 的对称 s，是指

$$s:X\to X:\overrightarrow{xp(x)}=\overrightarrow{p(x)s(x)}\quad\forall x\in X;$$

我们有 $s^2=s\circ s=\mathrm{Id}_X$ 和 $s\in A(X;X)$. 用 3.4.2 中的说法，我们

也可以说 $s(x)$ 是这么定义的: $p(x)$ 是 $\{x, s(x)\}$ 的中心. 关于 $s\in A(X;X)$ 和 $s^2=\mathrm{Id}_X$ 的说明,可参见 2.8.5;关于使 $p^2=p$ 的 $p\in A(X;X)$ 亦见同节.

2.4.9.7 关于子空间与 X 的自同态(即 $A(X;X)$ 的元素)的不动点之间的关系,可参见 [FL], 第 68 页.

2.5 几何: Thalès, Pappus, Desargues

2.5.1 命题(Thalès 定理). 设 H, H', H'' 是仿射空间 X 中三个不相同的平行超平面, $(D_i)_{i\in I}$ 是 X 中一族直线,其中每一直线都不跟 H 弱平行,则点

$$d_i=H\cap D_i,\ d_i'=H'\cap D_i,\ d_i''=H''\cap D_i (i\in I)$$

(参见 2.4.9.4 和 2.4.6)具有下述性质: 数量 $\overrightarrow{d_id_i''}/\overrightarrow{d_id_i'}$ 与 $i\in I$ 无关,而只依赖于 H, H' 和 H'' 的选取. 反之,若对某个 i 有

$$d'''\in\langle d_i, d_i'\rangle,$$

而且假定 $\overrightarrow{d_id_i'''}/\overrightarrow{d_id_i'}$ 等于上面的这个公共值,则

$$d_i'''=d_i''=H''\cap D_i.$$

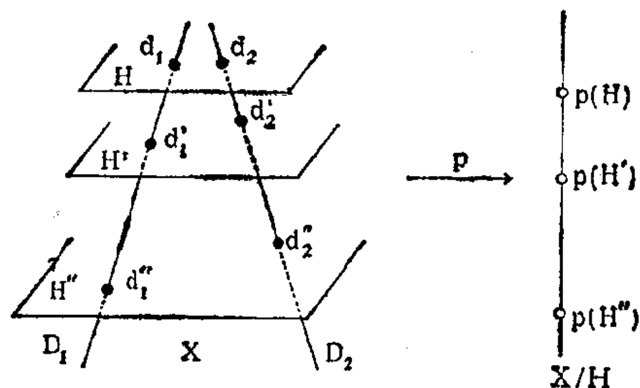


图 2.5.1.

我们引进商空间 $X/\vec{H}$ (参见 2.2.4)和规范投影 $p:X\to X/\vec{H}$; 容易看出 p 是射影映射. 根据 2.3.2,对任何 i 有:

$$\frac{\overrightarrow{d_id_i''}}{\overrightarrow{d_id_i'}}=\frac{\overrightarrow{p(H)p(H'')}}{\overrightarrow{p(H)p(H')}},$$

逆命题由直线 $\langle a, b\rangle(b \neq a)$ 上使 $\overrightarrow{ac}/\overrightarrow{ab}$ 是 K 中指定值的点 c 的唯一性即可证得。

在 6.5.4 中有 2.5.1 的另一种证明.

本节中下面的内容，都是从下述初等的结果推衍出来的。

2.5.2 引理. 设 $a,b\in X$，$a\neq b$，$f\neq \mathrm{Id}_X$ 是一个扩张，$a'=f(a)$，$D=\langle a, b\rangle$ 是经过 a，b 的直线；设 D' 过 a' 点并平行于 D（参见 2.4.9.2）。

则 $b'=f(b)$ 与下列命题等价：

(i) 若 $f\in T(X)$，则 b' 是 D' 与过 b 点且平行于 $\langle a, a'\rangle$ 的直线的交点；

(ii) 若 f 是以 0 为中心的位似，则 $b'=D'\cap\langle 0, b\rangle$.

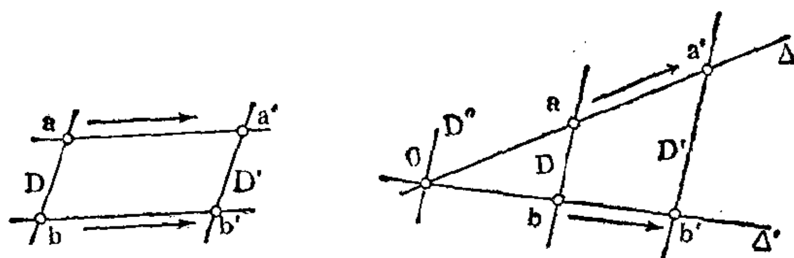


图 2.5.2.

在 f 是平移的情形，就有著名的"平行四边形法则"

$$\text{若 } \overrightarrow{ab}=\overrightarrow{cd}, \text{ 则 } \overrightarrow{ac}=\overrightarrow{bd},$$

它可从 $\vec{X}$ 的可交换性推出。在 $f\notin T(X)$ 的情形，我们作 $0,a$，b 所生成的平面，并对 D，D'，D'' 这三条直线应用 Thalès 定理，其中 D'' 是过 0 点平行于 D 的直线；这三条直线就是 2.5.1 中的超平面 H,H' 和 H''，与它们相交的两条直线是 $\Delta=\langle 0, a\rangle$ 和 $\Delta'=\langle 0, b\rangle$.

2.5.3 命题（Pappus 定理，仿射的情形；参见 5.4.2）。设 X 是仿射平面，D 和 D' 是 X 上两条不同的直线，$x, y, z\in D$ 和 $x', y', z'\in D'$ 都是不同的点，而且都不同于 $D\cap D'$，则由

$$\langle x, y'\rangle /\!/ \langle x', y\rangle \text{ 和 } \langle y, z'\rangle /\!/ \langle y', z\rangle$$

就可推出 $\langle x,z'\rangle /\!/ \langle x',z\rangle$.

第一种情形：D 不平行于 D'，于是(由 2.4.9.5) $D \cap D'$ 只含一点 0．设 f (相应地，g)是使 $f(x)=y$ (相应地，$g(y)=z$) 的以 0 为中心的位似．由 2.5.2 并根据假设条件，就有 $x'=f(y')$，$g(z')=y'$．但 $g\circ f=f\circ g$ (应用 2.3.3.11，注意到K是可交换的！)，因而 $z=h(x)$ 且 $x'=h(z')$，由此，根据 2.5.2 的逆命题可知 $\langle x, z'\rangle /\!/ \langle x', z\rangle$．

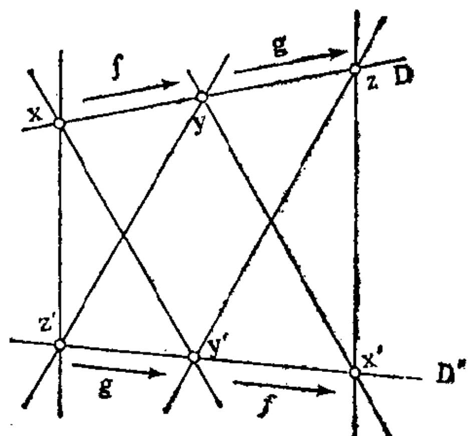


图 2.5.3.

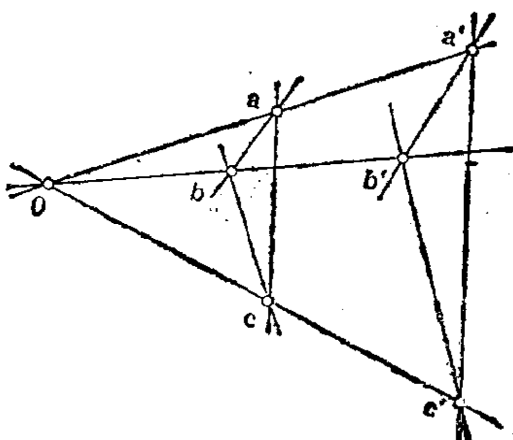


图 2.5.4.

第二种情形：$D /\!/ D'$；将上面的位似换成平移即可．

2.5.3 的逆命题也成立，参见 2.8.6．

2.5.4 命题 (Desargues 定理，仿射的情形；参见 5.4.7)．设

$$\langle a, b, c\rangle, \langle a', b', c'\rangle$$

是仿射空间中的两个三角形，它们没有相重的顶点，但三边各各平行：$\langle a, b\rangle /\!/ \langle a', b'\rangle$，$\langle b, c\rangle /\!/ \langle b', c'\rangle$，$\langle c, a\rangle /\!/ \langle c', a'\rangle$，则 $\langle a, a'\rangle$，$\langle b, b'\rangle$，$\langle c, c'\rangle$ 这三条直线或者两两平行，或者相交于一点．

由 $\langle a, b\rangle /\!/ \langle a', b'\rangle$ 可知，a, b, a', b' 这四点是在同一平面上的；于是(根据 2.4.9.5)，或者 $\langle a, a'\rangle /\!/ \langle b, b'\rangle$，或者 $\langle a, a'\rangle$ 和 $\langle b, b'\rangle$ 相交于一点 0． 考虑第二种情形：设 f 是以 0 为中心的位似，且使 $f(a)=a'$．根据 2.5.2，$f(b)=b'$．再用两次 2.5.2 可知，若 $f(c)=c''$，就有

$$\langle b, c\rangle /\!/ \langle b', c''\rangle \text{ 和 } \langle a, c\rangle /\!/ \langle a', c''\rangle,$$

根据 2.4.9.2，由上式可得 $c'=c''$．

2.5.5 附注. 在仿射和射影几何的公理化理论中，Pappus 定理和 Desargues 定理起着重要的作用；有时候它们是作为公理提出的. 我们特别注意到，Desargues 定理是建立在基域 K 的乘法满足结合律的基础上的，而 Pappus 定理则正是域 K 的乘法的可交换性的反映. 有兴趣的读者可以参阅，譬如说本书第 2.8.9 节，[AN] 的第 73页—75 页，[DI] 的定理 2.1.9（第 158 页—160 页）以及本书的 2.6.7 和 4.8.

2.5.6 推论（位似的特征）. 设 $f \in \mathfrak{S}_X$ 是从仿射空间 X 到自身的一个双射，而且对 X 中任一直线 D，$f(D)$ 总是 X 中一条平行于 D 的直线，则 $f \in \mathrm{Dil}(X)$.

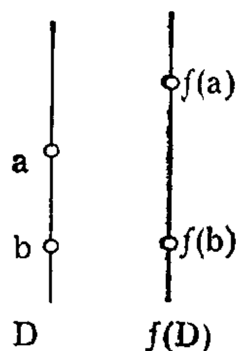


图 2.5.6.

逆命题是显见的，推论可由 2.5.4 的证明立即推出. 因为，若作由 $a, b, f(a), f(b)$ 定义的位似 f'，则从推论的条件可得 $f = f'$.

2.5.7 关于以上结论的实际应用，可参见 5.4 和 5.5.4，5.5.5.

2.6 仿射几何基本定理

这是本章中唯一的一个较费周折的结果，尽管结论本身很简单，但证明却相当困难，而且相当长.

2.6.1 引言. 我们看到(参见 2.4.2.2)，对 $f \in A(X; X')$，X 中任一直线的象是 X' 中的一条直线(或一个点). 反之则不然；首先，若 $\dim X = \dim X' = 1$，则任一映射 $X \to X'$（集论意义下的)都适用. 其次，取 $X = X' = \mathbf{C}^2$ 和 $f: (z_1, z_2) \longmapsto (\bar{z}_1, \bar{z}_2)$（其中 $\bar{\ }$ 表示共轭复数). 我们可以看出，f 将 $\mathbf{C}^2$ 中每条直线映成 $\mathbf{C}^2$ 中的一条直线：若 $D = x + \mathbf{C} \cdot z$（见 2.4.8.7)，则 $f(D) = \bar{x} + \overline{\mathbf{C} \cdot z}$ 仍是直线. 粗略地说起来，仿射几何基本定理就是说，上述的两个例子正好是使我们所需要的结论不能成立的仅有的两种情形；注意到，$z \longmapsto \bar{z}$ 是域 $\mathbf{C}$ 上的自同构. 在叙述定理之前，先介绍:

2.6.2 定义. 设 V, V' 分别是 K, K' 上的两个向量空间，映射 $f: V \to V'$ 称为半线性的，如果存在两个域之间的同构 $\sigma: K \to K'$，使得对所有的 $x, y \in V$ 和 $\lambda, \mu \in K$ 有

$$f(\lambda x + \mu y) = \sigma(\lambda) f(x) + \sigma(\mu) f(y).$$

设 X, X' 分别是域 K, K' 上的两个仿射空间；映射 $f: X \to X'$ 称为半仿射的，如果存在 $a \in X$ 使 $f: X_a \to X'_{f(a)}$ 是半线性的.

我们已经碰到过半仿射映射的例子：

$$(z_1, z_2) \longmapsto (\bar{z}_1, \bar{z}_2).$$

读者作为练习，可以把 2.3 节中大部分内容推广到半仿射的情形. 当然还可以验证半仿射映射将共线的点映成共线的点.

2.6.3 仿射几何基本定理. 设 X, X' 是具有相同的有限维数 d 的两个仿射空间，$d \geqslant 2$. 设 $f: X \to X'$ 是双射并且有下述性质：若 a, b, c 是 X 中位于同一直线上的三点，则它们的象点 $f(a)$, $f(b), f(c)$ 在 X' 中也位于同一直线上，则 f 是半仿射的.

在 [FL] 中可以找到更细致的结果；也可参看 5.4.8 和 5.4.9. 为了约略看一下这个定理的作用，我们回顾下面的

2.6.4 命题. 域 $\mathbf{R}$ 不能容有 $\mathrm{Id}_{\mathbf{R}}$ 以外的任何自同构；域 $\mathbf{C}$ 不能容有 $\mathrm{Id}_{\mathbf{C}}$ 和 $z \longmapsto \bar{z}$ 以外的任何连续自同构. 但域 $\mathbf{C}$ 能容有除 $\mathrm{Id}_{\mathbf{C}}$ 和 $z \longmapsto \bar{z}$ 以外的自同构.

可参见，譬如说 [FL] 的第 88 页或本书 2.8.10，也可见 [PO] 的第 48 页. 关于非交换的四元数体的自同构，可参阅 8.12.11.

2.6.5 推论. 设 X, X' 是具有相同的有限维数($\geqslant 2$)的两个实(即在域 $\mathbf{R}$ 上的)仿射空间，$f: X \to X'$ 是将任意三个共线的点映成共线的三点的双射，则 $f \in A(X; X')$.

2.6.3 的证明是很长的. 我们下面只给出主要的步骤和思路，如果想了解证明的细节，可参阅 [FL] 中从第 83 页开始的内容.

2.6.6.1 第一步. 若 $\{x_i\}_{i=0,1,\cdots,k}$ 在 X 中是独立的，则

$$\{f(x_i)\}_{i=0,1,\cdots,k}$$

在 X' 中独立. 我们先把 $\{x_i\}_{i=0,\cdots,k}$ 补充成 X 中的一个标架

$$\{x_i\}_{i=0,\cdots,d},$$

然后用反证法：假定 $\{f(x_i)\}_{i=0,\cdots,k}$ 不是独立的，那么 $\{f(x_i)\}_{i=0,\cdots,d}$ 也不是独立的，于是就有 $\langle f(x_0),\cdots,f(x_d)\rangle \neq X'$. 由 2.4.5 的证明和定理的假设条件就有

$$f(X)\subset\langle f(x_0),\cdots,f(x_d)\rangle \neq X',$$

和 f 是满射矛盾。

2.6.6.2 第二步. $\forall X$ 中任一直线 D, $f(D)$ 也是 X' 中一条直线，而且，$\forall$ 平行直线 $D/\!/D'$，有 $f(D)/\!/f(D')$.

在 D 上取两点 a,b，从而 $D=\langle a,b\rangle$. 令

$$D'=\langle f(a),f(b)\rangle;$$

设 $c'\in D'$, $x\in X$ 使 $f(x)=c'$ (f 是满射！)，则由 2.6.6.1,

$$x\in\langle a,b\rangle.$$

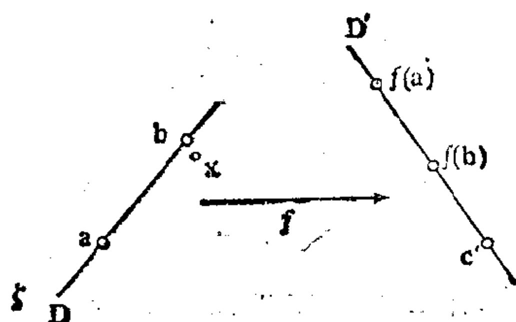


图 2.6.6.1.

现在设 $D/\!/D'$ 是 X 中两条平行直线，P 是它们生成的平面(总可假设 $D\neq D'$，否则不必证明)。令 $P'=\langle f(P)\rangle$；就有 $f(D)$, $f(D')\subset f(P)\subset P'$. 根据 2.4.9.5，只要

$$f(D)\cap f(D')=\emptyset,$$

就有 $f(D)/\!/f(D')$. 但 $f(D)\cap f(D')\neq\emptyset$ 是跟 f 的单射性矛盾的：设 $\gamma\in f(D)\cap f(D')$，则由 2.6.6.2 的开头部分可知，必存在 $c\in D$ 和 $c'\in D'$ 使得 $f(c)=f(c')=\gamma$，但 $D\cap D'=\emptyset$ (参见 2.4.9.5)。

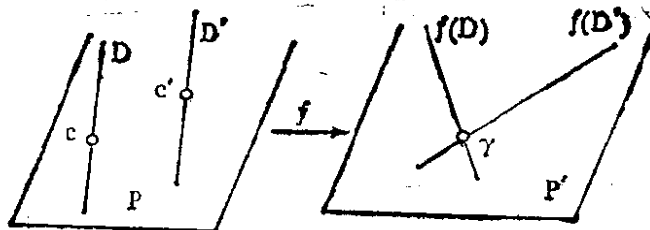


图 2.6.6.2.

2.6.6.3 第三步. 映射 f 有可加性。这里指的是：若 $0\in X$,

则 f 关于两个向量化空间 X_0 和 $X'_{0'}=X'_{f(0)}$ 是可加的，亦即对任何 $x, y\in X_0$ 有 $f(x+y)=f(x)+f(y)$。为说明这一点，只须注意到以下的事实：若 $x, y\in X_0$ 是线性独立的，则 $x+y$ 在几何上可通过作平行线的一般方法得到：见图 2.6.6.3.但由 2.6.6.1，$f(x)$ 和 $f(y)$ 也是线性独立的，因而，根据 f 的假设条件，多次应用 2.6.6.2 即得

$$f(x)+f(y)=f(x+y),$$

参见图 2.6.6.3。若 $y=\lambda x$，$\lambda\in K$，则可加性可由下面看出。

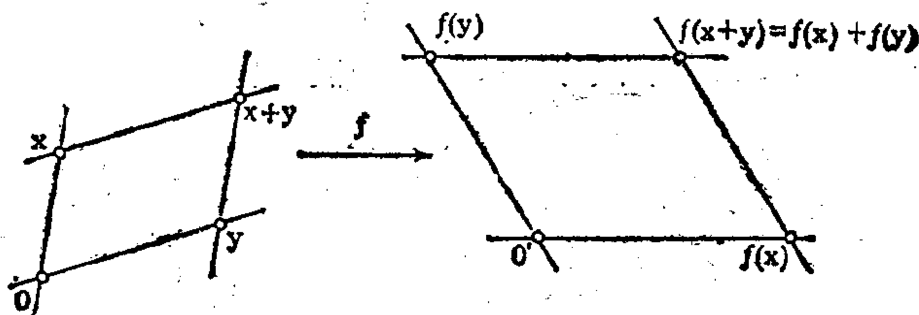


图 2.6.6.3.

2.6.6.4 **第四步**．构造同构 $\sigma:K\to K'$．固定 $0\in X, x\in X\setminus 0$，设 $D=K\cdot x$ 是 x 所生成的直线．设 $0'=f(0)$，

$$D'=f(D)=K'\cdot f(x).$$

在集合论的意义下，我们用图 2.6.6.4.2 来定义 $\sigma:K\to K'$：根据 2.6.6.2，$f_D:D\to D'$ 确是双射，至于双射 $K\to D$，$K'\to D'$，则分别是映射 $\lambda\longmapsto\lambda x$ 和 $\lambda'\longmapsto\lambda' f(x)$．还须说明 σ 是域的同态．这里的基本想法还是 $(\lambda+\mu)x$ 和 $(\lambda\mu)x$ 在几何上是可以用平行四边形法则从 λx 和 μx 出发作出来的，只要能有一点

$$y\in X\setminus D,$$

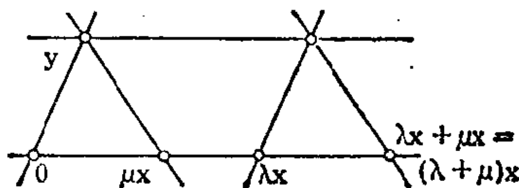


图 2.6.6.4.1.

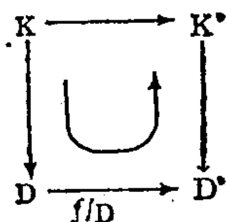


图 2.6.6.4.2.

图 2.6.6.4.3.

而假设条件 $\dim X = d \geqslant 2$ 正保证了这一点；整个过程如图 2.6.6.4.1 和 2.6.6.4.3 所示。在前一个图中，我们用了平行四边形法则（见 2.5.2 的证明）。在后一个图中，我们用了 2.5.3 和 2.3.3.11 中的证明。

2.6.6.5 第五步. f 是半仿射的. 第四步中实际上已经证明了 f 限制在 X 中任一过 0 点的仿射直线上时，总是一个半仿射映射，但有个先决条件：同构 $\sigma_D: K \to K'$ 不依赖于 D. 所以只须证明 σ_D 与 D 无关这一点. 而这正是图 2.6.6.5 所说明的，图中 D, D_1 是两条过 0 点的直线.

图 2.6.6.5.

2.6.7 仿射几何的公理化定义.

从某种意义上说，仿射几何基本定理说明了，一个仿射空间是由（或者说，几乎是由）其中的直线以及它们相交时的性质所决定的. 或者说，我们可以从集 X、其中的直线以及这些直线相交的

性质出发，完全构造出仿射空间$(\vec{X}; X, \Phi)$来。这种做法，部分地就是欧几里得的做法。从仿射空间的这种所谓公理化定义出发，我们把尽可能少的公理加在X及其子空间上，使之构成$(\vec{X}, X, \Phi)$；在欧几里得几何中，除了别的内容外，我们加上了度量空间的结构。关于公理化体系的文献是为数众多的，而且目前还有人在研究这些文献。其实，仿射空间的公理化理论和射影空间的公理化理论的研究是同时进行的。

这仍是一个可供探讨的研究领域，特别是二维的情形，因为这时 Desargues 定理不能从子空间相交公理推出（这一点可参见5.4.4）。粗略地说，在公理化的意义上，比之在2.1.1或4.1.1的意义上，有更多的仿射平面或射影平面，例如 Cayley 八元数射影平面，参见［PO］，第285页，本书4.8.3和［BES］，第3章。我们指出一些有关公理化理论的参考文献：［AN］，第II章，这是一本写得很清楚的入门书；［BR］，这本书写得很完备．［V-Y］是一本早年的文献，但对讨论“现代数学”仍是有启发意义的．关于射影平面，较新的参考书是［DI］和［H-P］．［FL］，第319页有一个简单的例子．

2.7 有限维实仿射空间

本节中所有的向量空间或仿射空间都是有限维(d维)的，而且都是实的，亦即是在实数域$\mathbf{R}$上的空间．

$d=2$或3时，我们讨论的就是通常的希腊人的几何或者我们所生存的平面或空间的几何，虽然抽去了度量的结构．d任意时的这些仿射空间就是本书的主要讨论对象，其中有时可能还被加上了欧氏结构．

2.7.1 X和$GA(X)$的规范拓扑．我们记得，实(或复)向量空间总具有一个规范拓扑(例如可参见［CH1］，第19页)．因此，有限维d的向量空间E的线性群$\mathrm{GL}(E)$也具有一个规范拓扑，即由d^2维向量空间$L(E; E)$诱导出来的拓扑．

2.7.1.1 命题. 设X是仿射空间，$a\in X$，则X上由向量化空间X_a的规范拓扑所诱导出来的拓扑，是仅与仿射空间X有关的；这个拓扑称为X的**规范拓扑**.

事实上，注意到有限维向量空间中的平移是同胚，再用 2.1.8，即可证得命题.

2.7.1.2 例如，每个态射 $f\in A(X;X')$ 总是连续的；每个仿射子空间Y总是闭集；而且，当 $X\neq Y$ 时，$X\backslash Y$ 总是稠密的.

2.7.1.3 为了得出 $\mathrm{GA}(X)$ 上的规范拓扑，如果我们不用到 2.3.4 的一般性结果的话，可以应用 2.3.3.6，2.3.3.7 和 2.3.3.8 进行如下：对 $a\in X$，将 $\mathrm{GA}(X)$ 写成半直积 $T(X)\mathrm{GA}_a(X)$，这样就有同构 $T(X)\cong\vec{X}$ 和 $\mathrm{GA}_a(X)\cong\mathrm{GL}(\vec{X})$，由此可得 $T(X)$ 和 $\mathrm{GA}_a(X)$ 上的拓扑，然后就得到 $T(X)\mathrm{GA}_a(X)$ 上的拓扑，从而得到了 $\mathrm{GA}(X)$ 上的拓扑.

2.7.1.4 命题. $\mathrm{GA}(X)$ 上的这个拓扑只与X有关，因而称为**规范拓扑**.

事实上，若 $f=s\circ g=s'\circ g'$，其中 $g\in\mathrm{GA}_a(X)$，$g'\in\mathrm{GA}_b(X)$，则s'必为平移 $s'=t_{\overrightarrow{f(a)a}}$ 而且 $g'=s'^{-1}\circ f$；于是 s' 和 g' 显然对二元组 $(s,g)\cong f$ 来说是连续的.

例如，$\mathrm{GA}_a(X)$ 和 $T(X)$ 都是 $\mathrm{GA}(X)$ 中的闭集；它们还是 $\mathrm{GA}(X)$ 中的紧集，这一点则留待 2.7.5 中讨论.

2.7.2 仿射空间的定向. 简单回顾一下向量空间的定向的概念. 向量空间的方向有两种等价的定义方法，一种用了行列式，另一种用了基的同伦.

2.7.2.1 在第一种代数的定义方法中，我们注意到，d维向量空间E上的d次交错多重线性形式全体所构成的向量空间 Λ^dE^*，是一个维数为 1 的实向量空间：$\dim(\Lambda^dE^*)=1$；所以 $\Lambda^dE^*\backslash 0$ 恰有两个连通分支.

2.7.2.2 定义. E的**定向**，就是取定 $\Lambda^dE^*\backslash 0$ 的两个连通分支中的一支$\mathscr{O}$. 形式 $\omega\in\Lambda^dE^*$ 称为**正形式**，如果 $\omega\in\mathscr{O}$；E中的基 $\mathscr{B}=\{e_i\}_{i=1,\cdots,d}$ 称为**正向基**(或**正基**)，如果$\omega(e_1,\cdots,e_d)>0$

$\forall \omega \in \mathcal{O}$.

最后的那个定义是有意义的，因为由 $\omega, \omega' \in \mathcal{O}$ 就可推出存在 $k \in \mathbf{R}_+^*$ 使 $\omega' = k\omega$.

2.7.2.3 我们注意到，若 $\omega \in \mathcal{O}$ 且 $f \in GL(E)$，则拉回形式 $f^*\omega \in \mathcal{O}$ 当且仅当 $\det f > 0$ 时成立. 因而，不管 E 是否定向，我们都引进下面的记号.

2.7.2.4 记号. 我们记 $GL^+(E) = \{f \in GL(E): \det f > 0\}$，$GL^-(E) = \{f \in GL(E): \det f < 0\}$.

2.7.2.5 于是，对 E 的任一方向 $\mathcal{O}: \forall \omega \in \mathcal{O} \quad \forall f \in GL^+(E)$: $f^*\omega \in \mathcal{O}$，而且，对 E 的任一正向基 $\mathscr{B}$ 而言，$f(\mathscr{B})$ 是正向基的充要条件是 $f \in GL^+(E)$. 因此，不管 E 是否定向，我们总可以说：$GL^+(E)$ 的元素是保向的. 若 E, E' 是两个具有相同的有限维数的实向量空间，仅当 E 和 E' 都定向，我们才能定义 $\mathrm{Isom}^+(E; E)$（譬如说，定义为 $f^*\omega' \in \mathcal{O} \quad \forall \omega' \in \mathcal{O}'$，其中 $\mathcal{O}$ 和 $\mathcal{O}'$ 分别定义了 E 和 E' 的方向）.

2.7.2.6 定向的第二种定义方式，是几何的，甚至是力学的；简单地说起来，如果两个基可以相互通过形变达到，那么它们有相同的方向.

2.7.2.7 定义. 向量空间 E 中的两个基 $\mathscr{B}$, $\mathscr{B}'$ 称为**同伦的**，如果存在连续映射 $F: [0, 1] \to E^d$，使得 $F(0) = \mathscr{B}$，$F(1) = \mathscr{B}'$ 且对每一 $t \in [0, 1]$，$F(t)$ 是一个基. E 的定向，就是对 E 中的基的全体的集合，在等价关系“相互同伦”下取定一个等价类.

2.7.2.8 本节唯一的新内容是证明定义 2.7.2.2 和 2.7.2.7 的等价性，也即说明基的集合里恰有两个等价类，而且，如果 E 是在 2.7.2.2 的意义下定向的，那么正向基的集合正好就是其中的一个等价类. 为此，先注意到，若在 E 中取定一个基 $\mathscr{B}_0$，则通过

$$\varphi(f) = f(\mathscr{B}_0)$$

决定了一个映射 $\varphi: GL(E) \to E^d$，这个映射的象集是 E 中的基的集合，它是一个连续映射，而且还是到象集上的一个同胚. 因此由

下述命题即可推得两种定义的等价性：

2.7.2.9 命题. 空间 $GL(E)$ 恰好有两个连通分支，即 $GL^+(E)$ 和 $GL^-(E)$，而且它们都是弧连通的.

$GL(E)$ 至少有两个通连分支可由下列事实推出：行列式 $\det(\cdot)$ 是一个 $GL(E)\to \mathbf{R}^*$ 的连续函数，且是满射.

$GL^+(E)$ 的弧连通性将在 8.4.3 中证明.

现在，我们可以来考虑仿射空间的定向了.

2.7.2.10 定义. 仿射空间 X 的定向，就是指它的底向量空间 $\vec{X}$ 的定向. 定向仿射空间 X 中的仿射标架 $\{x_i\}_{i=0,1,\cdots,d}$ 称为正向标架，如果 $\{\overrightarrow{x_0x_i}\}_{i=1,\cdots,d}$ 是 $\vec{X}$ 的正向基. 记

$$GA^+(X)=\{f\in GA(X):\vec{f}\in GL^+(\vec{X})\},$$

$$GA^-(X)=\{f\in GA(X):\vec{f}\in GL^-(\vec{X})\}.$$

2.7.2.11 对两个都已定向的仿射空间，也可定义 $\mathrm{Isom}^+(X,X')$. 仿射标架间也可以定义同伦（不管 X 是否定向）. 为了说明从同伦关系出发仍得到相同的定向概念，只须说明 $GA^+(X)$ 仍是弧连通的就可以了.

然而，对 $a\in X$，$GA^+(X)$ 就是半直积 $T(X)GA^+(X)$（参见 2.7.1.3），其中 $T(X)$ 是与弧连通空间 $\vec{X}$ 同胚的，$GA_a^+(X)$ 同胚于 $GL^+(\vec{X})$，根据 2.7.2.9，后一空间也是弧连通的.

2.7.3 超平面与半空间

2.7.3.1 设 H 是仿射空间 X 的一个超平面；根据 2.4.8.6，必存在 X 上的仿射形式 $f\in A(X;\mathbf{R})$，使 $H=f^{-1}(0)$. 于是很自然地我们要来讨论 X 的子集 $f^{-1}(\mathbf{R}_+)$，$f^{-1}(\mathbf{R}_-)$ 以及 $f^{-1}(\mathbf{R}_+^*)$，$f^{-1}(\mathbf{R}_-^*)$；前两个是 X 中的闭集，后两个是开集，分别以 $f^{-1}(\mathbf{R}_+)$ 和 $f^{-1}(\mathbf{R}_-)$ 为闭包.

2.7.3.2 命题. $f^{-1}(\mathbf{R}_+)$ 和 $f^{-1}(\mathbf{R}_-)$（相应地，$f^{-1}(\mathbf{R}_+^*)$ 和 $f^{-1}(\mathbf{R}_-^*)$）只与超平面 H 有关；它们称为由 H 决定的闭（相应地，开）半空间. 每个半空间都是弧连通的. 空间 $X\setminus H$ 恰有两个连通分支：由 H 决定的开半空间 $f^{-1}(\mathbf{R}_+^*)$ 和 $f^{-1}(\mathbf{R}_-^*)$.

第一个结论可由 2.4.8.6 的开头一段推出。第二个结论可由半空间的凸性推出。由于仿射形式是连续的（参看 2.7.1.2）；而且 $\mathbf{R}^*$ 有两个连通分支，所以 $X\backslash H$ 至少应有两个连通分支，由此即可推出最后的结论。

半空间将在第 11 章和第 12 章中起重要的作用。

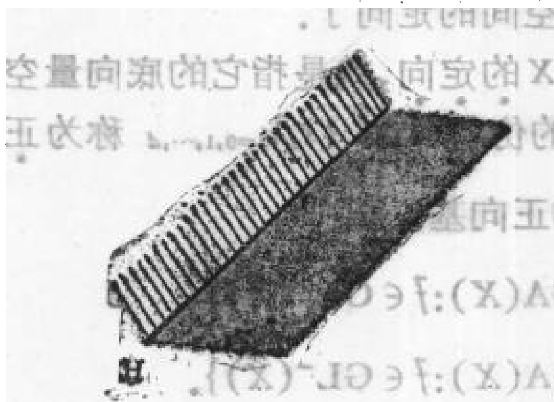


图 2.7.3.2.



图 2.7.3.3.

2.7.4 仿射空间上的 Lebesgue 测度

2.7.4.1 我们将随意使用积分理论中的经典结论，参见 0.6.

2.7.4.2 设 E 是向量空间，$f:\mathbf{R}^d \to E$ 是同构（例如，是在 E 中取定一个基后得到的）；设 μ_0 是 $\mathbf{R}^d$ 上的 Lebesgue 测度，$f(\mu_0)$ 是 μ_0 在 f 下的象测度；若 $g:\mathbf{R}^d \to E$ 是另一个同构，我们要比较一下 $g(\mu_0)$ 和 $f(\mu_0)$.

变量替换法则（参见 [GT]，第 33 页）表明

$$g(\mu_0) = |\det(g^{-1}\circ f)|f(\mu_0),$$

其中 $|\det(g^{-1}\circ f)|$ 现在是非零正实数。于是，一个向量空间尽管本身并没有规范测度，却总在不计数量差别的意义下具有一个这样的测度；或者说，它总有一族自然测度，即 $f(\mu_0)$ 全体的集合，这里 $f\in \mathrm{Isom}(\mathbf{R}^d;E)$.

这样的测度，称为 E 上的 Lebesgue 测度．讨论仿射空间时，只要注意到，在 $\mathbf{R}^d$ 上 μ 是在平移下不变的．由此即得

2.7.4.3 命题. $\vec{X}$ 上的一个 Lebesgue 测度在任一双射

$$\Theta_a^{-1}:\vec{X}\to X,\ a\in X$$

下的象测度,称为仿射空间X上的 Lebesgue 测度. X上的两个 Lebesgue 测度总是成比例的. 若μ是X上的一个 Lebesgue 测度,我们把生成该测度的 $\vec{X}$ 上的 Lebesgue 测度记为 $\vec{\mu}$, 对任一X上的 Lebesgue 测度μ和任一 $f\in GA(X)$, 象测度 $f(\mu)$ 为

$$f(\mu) = |\det\vec{f}|\,\mu.$$

在 9.12 中我们会看到,欧氏仿射空间具有一个规范 Lebesgue 测度.

2.7.4.4 附注. 仿射空间上在任何平移下不变的测度, 必为 Lebesgue 测度. 证明这一结论的基本思想, 是修改性态不佳的测度, 修改后的测度仍是不变测度, 然而是连续的, 因而与某个 Lebesgue 测度成比例. 由于在平移下不变, 这个比例因子又必须是一个常数.

2.7.5 紧集的中心. $GA(X)$ 的紧子群

本节的目的是依据 Lebesgue 测度在仿射空间X的任一紧子集K中决定一点, 它在任何使 $f(K)=K$ 的 $f\in GA(X)$ 下都是不动的. 这一性质将在 2.7.5.10 中起实质性的作用.

2.7.5.1 先在X上固定一个 Lebesgue 测度 μ, 并假设K的内部非空: $\mathring{K}\neq\emptyset$. 于是特别就有

$$\mu(K) = \int_X \chi_K\mu > 0$$

(其中 χ_K 是K的特征函数, 参见 0.6). 我们记得,对任一测度 μ, 总可定义在向量空间E中取值的测度如下:

对 $f:\ X\to E:\varphi\left(\int_X f\mu\right) = \int_X \varphi(f)\mu \quad \forall\varphi\in E^*$, 或者,在任一坐标系下也可写为

$$\int_X f\mu = \left(\int_X f_1\,\mu,\cdots,\int_X f_d\mu\right), \text{这里 } f=(f_1,\cdots f_d).$$

对紧子集K和任一点 $a\in X$, 令

$$I_\mu(a) = \int_{x\in X}\chi_K\overrightarrow{ax}\vec{\mu}.$$

若 $b\in X$ 是另一点,则有

$$I_\mu(b) = \int \chi_K \overrightarrow{bx}\mu = \int \chi_K\left(\overrightarrow{ba} + \overrightarrow{ax}\right)\mu = \mu(K)\overrightarrow{ba} + I_\mu(a).$$

由此即得

2.7.5.2 命题. 对 X 的紧子集 $K(\mathring{K} \neq \emptyset)$ 来说，点

$$a + (\mu(K))^{-1} I_\mu(a)$$

与 $a \in X$ 和 X 上的 Lebesgue 测度 μ 都是无关的；这一点记为 cent′(K)，或在必要时记为 $\mathrm{cent}'_X(K)$.

2.7.5.3 注. 若 X 是欧氏仿射空间，$d = 2$ 或 3，而且我们把 K 看作一块板或一个各向同性的（即有常数密度 1 的）固体，则 cent′(K) 就是在力学或物理意义下 K 的重心. 但要注意到，$\mathring{K} = \emptyset$ 时情况不然；见下面的 2.7.5.5 以及 3.4.2，3.7.14.

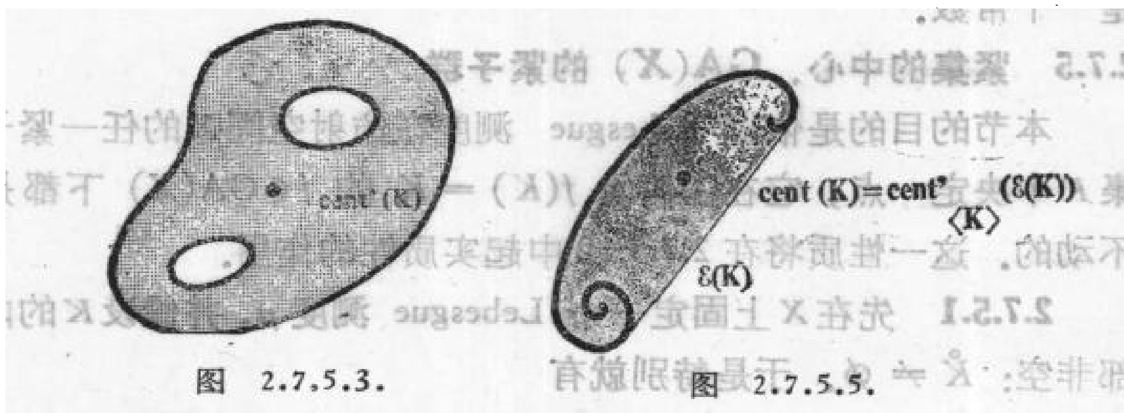


图 2.7.5.3.　　　　图 2.7.5.5.

2.7.5.4 在紧集 K 的内部可能是空集的情形，我们采用下述建立在第 11 章的基础上的方法：设 K 是 X 的任一紧子集，$\mathscr{E}(K)$ 是它的凸闭包，$\langle K\rangle$ 是 K 所生成的仿射子空间，则由 11.2.7，$\mathscr{E}(K)$ 在 $\langle K\rangle$ 中的内部是非空的；因此我们给出下面的定义.

2.7.5.5 定义. 设 K 是仿射空间的一个紧子集，点

$$\mathrm{cent}(K) = \mathrm{cent}'_{\langle K\rangle}(\mathscr{E}(K))$$

称为 K 的中心.

2.7.5.6 注. 因而，一般地说 K 的中心并不与匀质线段 K 的力学意义的重心重合. 例如 K 是欧氏仿射空间 X 的曲线段时就不重合. 此外，这个中心也不跟我们在 9.8.6 中将碰到的别的不动点相

重合.

2.7.5.7 命题. 设K是仿射空间X的一个紧子集；则对任何使 $f(K)=K$ 的 $f\in \mathrm{GA}(X)$，总有 $f(\mathrm{cent}(K))=\mathrm{cent}(K)$. 换言之，

$$\mathrm{GA}_K(X)=\{f\in \mathrm{GA}(X):f(K)=K\}\subset \mathrm{GA}_{\mathrm{cent}(K)}(X).$$

而且，若 $\mathring{K}\neq\emptyset$，则 $|\det\vec{f}|=1\quad \forall f\in \mathrm{GA}_K(X)$.

后一结论可从 2.7.4.3 的最后一段推出：

$$f(\mu)(K)=\mu(f^{-1}(K))=\mu(K)=|\det\vec{f}|\mu(K).$$

从 2.7.5.4 和 2.7.5.5 可看出，前一结论可仅对 $\mathring{K}\neq\emptyset$ 的情形加以证明. 于是：

$$\begin{aligned}f(\mathrm{cent}(K))&=f(a+(\mu(K))^{-1}I(a))\\&=f(a)+\vec{f}((\mu(K))^{-1}I(a))\\&=f(a)+(\mu(K))^{-1}\vec{f}(I(a)),\end{aligned}$$

其中 $a\in X$ 是任意一点. 应用 2.7.5.1 就可得到

$$\begin{aligned}\vec{f}(I(a))&=\vec{f}\left(\int_{x\in X}\chi_K\overrightarrow{ax}\,\vec{\mu}\right)=\int_{x\in K}\chi_K\vec{f}(\overrightarrow{ax})\vec{\mu}\\&=\int_{x\in K}\chi_K\overrightarrow{f(a)f(x)}\vec{\mu}=I(f(a)),\end{aligned}$$

因此，

$$f(\mathrm{cent}(K))=f(a)+(\mu(K))^{-1}I(f(a))=\mathrm{cent}(K).$$

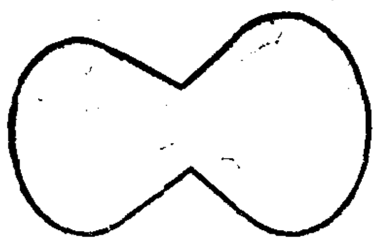
2.7.5.8 附注. 如果知道X是欧氏仿射空间，就可以证明，使 $f(K)=K$ 的每个 $f\in \mathrm{Is}(X)$ (X 的同构所成的群) 必使X的一个不动点只依赖于K，这个证明并不用到积分的理论：见 9.8.6. 另外还可证明，对 $\mathring{K}\neq\emptyset$ 的紧集 K，总存在一个X上的欧氏结构在 $\mathrm{GA}_K(X)$ 下不变，这样，对这个结构来说特别就有

$$\mathrm{GA}_K(X)\subset \mathrm{Is}(X);$$

见 2.7.5.10 和 8.2.5.

最后注意到，一般说来 $\mathrm{GA}_{\mathscr{E}(K)}\neq \mathrm{GA}_K(X)$，正如图2.7.5.8所说明的.

2.7.5.9 命题. 设K是仿射空间X中内部非空的紧子集；则


图 2.7.5.8.

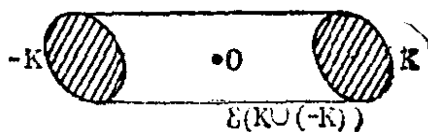


图 2.7.5.9.

对 GA(X) 的拓扑 2.7.1.3 而言，这个群的子群 GA$_K(X)$ 是紧的。

$\mathring{K}\neq\varnothing$ 的条件是必要的：若取 $K=\{a\}$，$a\in X$，则 GA$_a(X)$ 同胚于非紧的 GL$(\vec{X})$。

我们应用 2.7.5.7 在 cent(K) 将 X 向量化；这就又回到了 X 是向量空间的情形；因为 cent$(K)\in\mathring{K}$，还可以假设它的原点 $0\in\mathring{K}$（参见 2.8.11）。不过，为了避免证明这一点，我们注意到，若 $f(K)=K$，$f\in$ GL(X)，则

$$f(-K)=-K,\ \text{其中}\ -K=\{-x:x\in K\},$$

另外，$\mathscr{E}(K\cup(-K))$ 是包含 0 作为内点的。在 X 上加上任一欧氏结构，并设 $\varepsilon>0$ 使得 $B(0,\varepsilon)\subset K$；设

$$M=\sup\{\|x\|:x\in K\},\ \text{则由}\ f(K)=K,$$

就有

$$\|f(x)\|\leqslant M\quad\forall x\,|\,\|x\|\leqslant\varepsilon;$$

这就是说，对 $L(X;X)$ 上的普通范数来说，$\|f\|\leqslant\varepsilon^{-1}M$。这样，GL$_K(X)$ 就是 $L(X;X)$ 的一个有界闭集，因而是紧集。

反过来，有

2.7.5.10 命题. 设 G 是 GA(X) 的一个紧子群；则存在 $x\in X$ 使 $G\subset$ GA$_x(X)$。而且，存在一个 X 上的在 G 下不变的欧氏结构，也就是说在这结构下 $G\subset$ Is(X)。

因为，设 $a\in X$ 是任意一点，则 $G(a)$ 是 a 在 G 的作用下的轨道；这是 x 中的紧集，而且我们所要的点就是 $x=$ cent$(G(a))$（参见 2.7.5.7）。"而且"云云，我们以后将用三个方法加以证明，参见 8.2.5 和 9.8.6。

2.7.5.11 推论. $GA(X)$ 的所有极大紧子群都是(在 $GA(X)$ 中关于内自同构)相互共轭的.

在由 $\vec{X}$ 上二次形式 q 所定义的 X 的欧氏结构下使 a 不动的同构全体所成的群 $Is_a(X, q)$ 是紧的，从 2.7.5.10 可知，$GA(X)$ 的任一极大紧子群都是某个 $Is_a(X, q)$，这里 a 和 q 都是适当取定的. 由 8.1.6 和公式 1.5.3，推论得证.

2.7.5.12 附注. 上述推论是按历史上的面貌叙述的. 事实上，一个很一般也很基本的结论是，任一李群的所有极大紧子群都是相互共轭的，例如可参见 [HN]，第 218 页和第 240 页的注.

2.7.5.10 在一般情形下不一定成立，即使给定的是一个性态很好的空间的同构群；举例来说，设 X 是球面，$G = Is(X)$ 是球面上同构全体所成的群(参见 18.5)，则 G 没有任何不动点. 关于这方面的一个很一般的结论，可见 9.8.6.5.

2.7.6 等仿射几何. 在 2.7.5.7 的结尾，我们很自然地碰到过子群

$$SA(X) = \{f \in GA(X): |\det \vec{f}| = 1\},$$

这个子群有时称为 X 的幺模群或特殊仿射群. 于是，这个群的元素使 X 上的每个 Lebesgue 测度不变；但这个群不是紧的，事实上对 X 上给定的一个欧氏结构来说，这个群要比 $\mathrm{Isom}(X)$ 大得多. 然而，有一种内容丰富的几何学却正是从讨论 $SA(X)$ 下不变的性质发展而成的，这种几何曾经有过相当的发展：一般性的文献是 [SK]，第 1-50 到 1-56 页，[FT1] 第 40 到 52 页，[BLA2] 和 [DE6] 第 340 页的练习 12. 譬如说，我们可以对 X 中可微分的曲线来定义长度的概念和仿射曲率的概念，它们都是在 $SA(X)$ 下不变的；参见 2.8.12.

2.7.7 仿射空间中的微分学. 设 X, X' 是两个仿射空间，U 是 X 的开集而 $f: U \to X'$. "f 是可微分的，是 C^p 类的……" 之类的概念是很容易建立起来的. 只不过要注意到，f 的导数 f' 是属于 $L(\vec{X}; \vec{X'})$ 的. 我们可以用两种方式建立起这种微分运算来. 一种方式的依据是 X 和 X' 的不同的向量化之间只相差平移，而平移是 C^∞ 类的；另一种方式则着眼于：可微性的定义只涉及考察差

式

$$f(x)-f(a)-g(x-a),\ g\in L(\vec{X};\vec{X}'),$$

但因

$$x-a=\overrightarrow{ax}\in\vec{X}\quad 且\ f(x)-f(a)=\overrightarrow{f(a)f(x)}\in\vec{X}',$$

所以前面的差式确是属于 $\vec{X}'$ 的.

关于微分学的一本比较全面的参考书是 [CH1].

2.8 练 习

2.8.1 Ceva 定理. 设 $\{a, b, c\}$ 是仿射平面上的一个三角形, $a'\in\langle b, c\rangle$, $b'\in\langle c, a\rangle$, $c'\in\langle a, b\rangle$ 是三边上的三点. 三条直线 $\langle a, a'\rangle$, $\langle b, b'\rangle$ 和 $\langle c, c'\rangle$ 共点的充要条件是(参见 2.4.6)

$$\frac{\overrightarrow{a'b}}{\overrightarrow{a'c}}\cdot\frac{\overrightarrow{b'c}}{\overrightarrow{b'a}}\cdot\frac{\overrightarrow{c'a}}{\overrightarrow{c'b}}=-1.$$

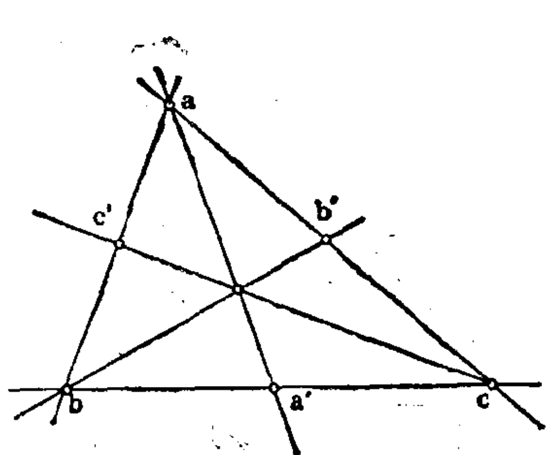


图 2.8.1.1.

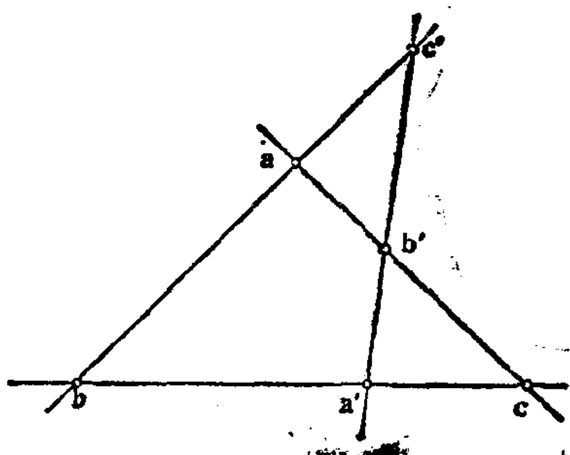


图 2.8.1.2.

2.8.2 Menelaüs 定理. 在 2.8.1 的假设条件下,证明 a', b', c' 三点共线的充要条件是 (参见 2.4.6)

$$\frac{\overrightarrow{a'b}}{\overrightarrow{a'c}}\cdot\frac{\overrightarrow{b'c}}{\overrightarrow{b'a}}\cdot\frac{\overrightarrow{c'a}}{\overrightarrow{c'b}}=1.$$

2.8.3 设 X 是 k 个元素的有限域上的 n 维仿射空间. 计算 $\# X$,

$\#GA(X)$ 以及 X 中 p 维子空间的数目.

2.8.4 证明：当 X 是向量空间时，$GL(X)$ 的中心化为 $K^* \cdot Id_X$.

2.8.5 设 X 是仿射空间，讨论使 $f^p = Id_X$ 或 $f^2 = f$ 的 $f \in GA(X)$.

2.8.6 叙述并证明 2.5.3 和 2.5.4 的逆命题.

2.8.7 设 X 是复(即域 $\mathbf{C}$ 上的)仿射空间；证明它容有一个规范拓扑. 在这个拓扑下，讨论 $X \backslash H$ 的连通性，其中 H 是超平面.

2.8.8 证明：若 X 是有限维实仿射空间，Y 是子空间，则当

$$\dim Y \leqslant \dim X - 2$$

时 $X \backslash Y$ 必是连通的. 讨论 $X \backslash Y$ 的单连通性(参见 18.2.2).

2.8.9 **Pappus 定理与可交换性.** 设 X 是一个仿射平面，其底空间是非交换的体上的向量平面，而且 X 中任意六点都满足定理 2.5.3. 证明 X 的基域是可交换的.

2.8.10 证明 $\mathbf{R}$ 除 $Id_{\mathbf{R}}$ 外不可能容有其它的域自同构，$\mathbf{C}$ 除 $Id_{\mathbf{C}}$ 和 $z \longmapsto \bar{z}$ 外不可能容有其它的连续的域自同构.

2.8.11 设 K 是有限维实仿射空间的紧子集，而且 $\mathring{K} \neq \emptyset$；设 H 是 X 的超平面，X' 和 X'' 是 X 的两个闭的半空间. 又假定 H 满足下述条件：若 $K \cap X' = K'$，$K \cap X'' = K''$，则 $\mathring{K}' \neq \emptyset$，$\mathring{K}'' \neq \emptyset$.

证明(参见 2.7.5.2)：当 $\mathrm{cent}'(K')$ 和 $\mathrm{cent}'(K'')$ 处分别作用有质量 $\mu(K')$ 和 $\mu(K'')$ 时，它们的重心就是 $\mathrm{cent}'(K)$. 并由此推出，若 K 还是凸集，则总有

$$\mathrm{cent}(K) \in \mathring{K}.$$

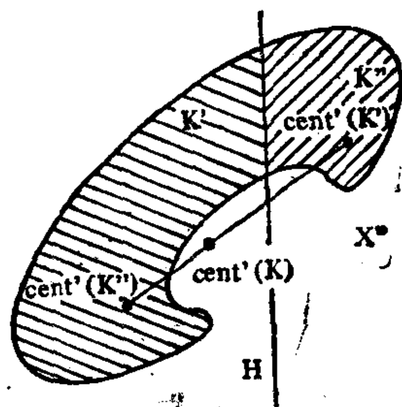


图 2.8.4.

2.8.12 **等仿射长度与等仿射曲率.** 设 X 是实仿射平面；我们在 $\vec{X}$ 中取定一个基，于是可以定义 $\vec{X}$ 中任意两个向量的行列式 $\det(\vec{u}, \vec{v})$ (当然，是关于这个基的). 设 $c:[a,b] \to X$ 是 X 中一条 C^3 类可微曲线. 称实数

$$\int_a^b \sqrt[3]{\det(\vec{c}'(t),\ \vec{c}''(t))}\, dt$$

为 c (在取定基的 X 中)的等仿射长度.

证明：$\forall f\in SA(X)$，c 的等仿射长度等于 $f\circ c$ 的等仿射长度（参见 2.7.6）。证明：若 c 使得 $\det(\vec{c}'(t),\vec{c}''(t))\neq 0$，则可重新将 c 的参数取为等仿射长度。设 c 是以等仿射长度为参数的曲线，则称 $K=\det(\vec{c}'',\vec{c}''')$ 为 c 的**等仿射曲率**；证明这曲率也是在 $SA(X)$ 下不变的。分别对 X（已取定一基）中的椭圆、双曲线和抛物线计算它们的等仿射长度和等仿射曲率。在欧氏平面上，在不计同构差别的情况下，曲线是由作为弧长的函数的曲率所决定的（例如可参见［B-G］，第 323 页），证明：与此相仿地，在不计相差 $SA(X)$ 中某一元素的情况下，X 中的一条曲线是由作为等仿射弧长的函数的等仿射曲率所决定的。关于等仿射几何的其它结果，可参见 2.7.6 中的参考书目。

第3章　泛空间及其应用

在这技巧性较强的一章中，我们对每个仿射空间X作出相应的向量空间 $\hat{X}$;X 嵌入 $\hat{X}$ 中成为一个不含原点的仿射超平面，而 $\vec{X}$ 则是一个以 X 嵌入后所成的仿射超平面作为方向的 $\hat{X}$ 的超平面(第 3.1 节). $\hat{X}$ 的构造也许看上去有些突如其来，但我们希望读者慢慢看下去会发觉引进这个构造是确有补益的. 以后在讲到一些古典的理论时，将多次用到泛空间；这些理论是：重心（第 3.4 节），重心坐标(第 3.6 节)，齐次化变量在非齐次多项式上的作用(第 3.3 节)，仿射空间以自然的方式射影完备化(第 5 章)，仿射二次曲面的讨论(第 15 章).

3.1 泛　空　间

在仿射空间X中，由于没有特殊点(参见第 2 章引言及2.1.9)，不存在内在的向量运算的问题；但是我们可以在X中建立起X上向量场的内在运算，因为我们知道，从任一集合到一个向量空间E中的映射全体的集合，总有一个从E承继而来的向量空间结构.

3.1.1　定义. 仿射空间 $(X, \vec{X})$ 上的向量场，就是一个映射

$$f: X \to \vec{X};$$

向量场的集合记为 $\mathscr{V}(X)$，其上赋有规范的向量空间结构.

3.1.2　两个例子. 我们并不考虑很广泛的意义下的向量场，而只考虑下面两种类型的向量场：

3.1.2.1　$\vec{\xi} \in \vec{X}$ 连带的常向量场，亦即 $f \in \mathscr{V}(X)$ 定义为 $f(x) = \vec{\xi}$　$\forall x \in X$，记为 $f_{\vec{\xi}}$. 实用上，这种场的轨迹是平行于 $\vec{\xi}$ 的直线. 几何上，$x \longmapsto x + f(x)$ 就是平移 $t_{\vec{\xi}}$. 在图上把 f 画成 $(x, x + f(x))$ 的集合，就更直观了.

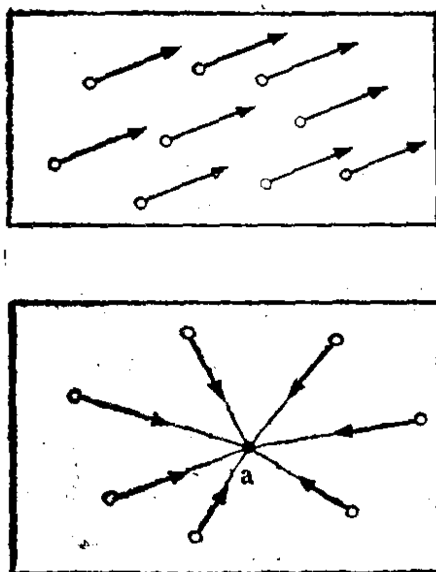


图 3.1.2.1.

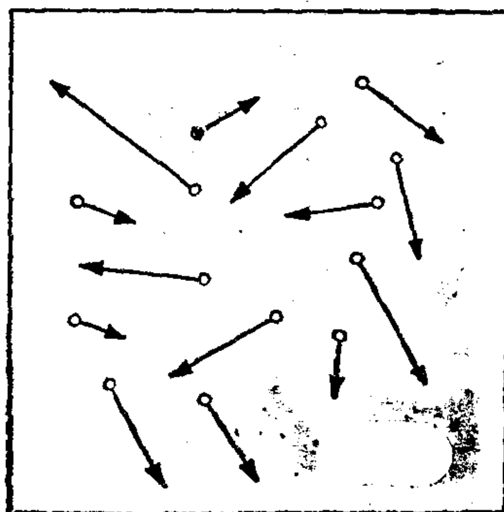


图 3.1.2.2.

3.1.2.2 中心场. $(k, a)\in K^*\times X$ 连带的中心场定义为 $x\longmapsto k\overrightarrow{xa}$ $\forall x\in X$, 记为 $f_{(k,a)}$. 这种场跟位似 $H_{a,1-k}$ 的关系是 $x+f(x)=H_{a,1-k}(x)$ $\forall x\in X$; 轨迹是通过 a (不包括 a 在内)的直线。参见3.7.6.

3.1.3 记号. 把 $\mathscr{V}(X)$ 分成两部分:

$\mathscr{C}(X)=\{f_{\vec{\xi}}: \vec{\xi}\in\vec{X}\}$, $\mathscr{C}'(X)=\{f_{(k,a)}:(k, a)\in K^*\times X\}$.

3.1.4 注意: $\vec{X}\ni\vec{\xi}\longmapsto f_{\vec{\xi}}\in\mathscr{C}(X)$ 是 $\vec{X}$ 与 $\mathscr{V}(X)$ 的向量子空间 $\mathscr{C}(X)$ 之间的一个线性同构; $\mathscr{C}'(X)$ 不是 $\mathscr{V}(X)$ 的向量子空间,但 $K^*\times X\ni(k, a)\longmapsto f_{(k,a)}\in\mathscr{C}'(X)$ 是一个双射, 而且在 $\mathscr{V}(X)$中有: $\lambda f_{(k,a)}=f_{(\lambda k,a)}$ $\forall(k, a)\in K^*\times X$ 和 $\forall\lambda\in K^*$; 于是 $\mathscr{C}(X)\cap\mathscr{C}'(X)=\emptyset$.

3.1.5 定理(初等的,然而是基本的).

并集 $\mathscr{D}(X)=\mathscr{C}(X)\cup\mathscr{C}'(X)$ 是 $\mathscr{V}(X)$ 的向量子空间. 由 $\varphi(f_{(k,a)})=k$ 和 $\varphi(f_{\vec{\xi}})=0$ $\forall\xi\in\vec{X}, \forall(k, a)\in K^*\times X$定义的映射 $\varphi:\mathscr{D}(X)\to K$ 是 $\mathscr{D}(X)$ 上的一个线性形式;映射

$$X\ni x\longmapsto f_{(1,x)}\in\mathscr{D}(X)$$

在X与 $\mathscr{D}(X)$ 的仿射超平面 $\varphi^{-1}(1)$ 之间诱导出一个仿射空间

的同构.(参见 2.2.3.)

3.1.6 我们有 $f_{(k,a)}+f_{(k',a')}:x\longmapsto k\overrightarrow{xa}+k'\overrightarrow{xa'}$; 若 $k+k'=0$, 则 $k\overrightarrow{xa}+k'\overrightarrow{xa'}=k(\overrightarrow{xa}-\overrightarrow{xa'})=k\overrightarrow{a'a}$, 因此 $f_{(k,a)}+f_{(k',a')}=f_{\overrightarrow{ka'a}}$, 若 $k+k'\neq 0$, 则存在 b 使 $\overrightarrow{ab}=\dfrac{k'}{k+k'}\overrightarrow{aa'}$, 由此可得

$$k\overrightarrow{xa}+k'\overrightarrow{xa'}=(k+k')\overrightarrow{xb}, \text{ 即 } f_{(k,a)}+f_{(k',a')}=f_{(k+k',b)}$$

(当然这个 b 不是随意给出的,在等式 $f_{(k,a)}+f_{(k',a')}=f_{(k+k',b)}$ 中把 b 作为未知数,令 $x=a$ 即可求得). 于是就有

$$f_{(k,a)}+f_{\xi}:x\longmapsto k\overrightarrow{xa}+\xi=k\overrightarrow{xa'},$$

其中 a' 使得 $\overrightarrow{aa'}=k^{-1}\xi$, 因此 $f_{(k,a)}+f_{\xi}=f_{(k,a')}$. 从前面的计算

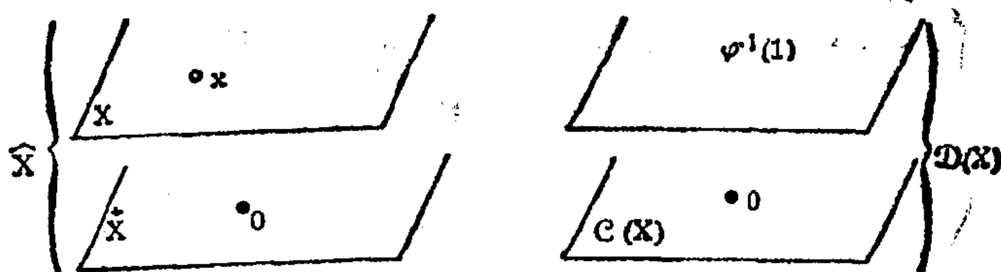


图 3.1.6.

中可看出 φ 是线性的. 为了证明 $\Sigma:x\longmapsto f_{(1,x)}$ 是一个仿射映射, 我们取定一点 $a\in X$; 若 Σ 是仿射映射,则应存在(参见 2.3.1)

$$\vec{\Sigma}:\vec{X}\to\mathscr{C}(X), \text{ 使得 } \overrightarrow{\Sigma(a)\Sigma(b)}=\Sigma(b)-\Sigma(a)$$

(在向量空间 $\mathscr{D}(X)$ 的意义下),但由定义:

$$\Sigma(b)-\Sigma(a):x\longmapsto\overrightarrow{xb}-\overrightarrow{xa}=\overrightarrow{ab},$$

因此必有 $\Sigma(b)-\Sigma(a)=f_{\overrightarrow{ab}}$, 从而 $\vec{\Sigma}$ 就是

$$\vec{X}\ni\xi\longmapsto f_{\xi}\in\mathscr{C}(X).$$

这样就反过来证明了 Σ 是仿射映射.

我们暂时离开向量场的讨论,插进下面这么一个注记.

3.1.7 **注**. 设 $(X,\vec{X})$ 是仿射空间, $\hat{X}$ 是不相交并集 $\vec{X}\cup(K^*\times X)$, 在 $\hat{X}$ 中把 X 和 $1\times X$ 看作等同的,则 $\hat{X}$ 关于下述运算成为一个向量空间:

$\times$: $k(h,x)=(kh,x)=(kh)x$, $0(kx)=0$, 特别有 $(k,x)=$

kx,

$+$: 若 $k+k'\neq 0$: $kx+k'x'=(k+k')x''$, 其中 $x''=x+\frac{k'}{k+k'}x$,

$-$: 若 $k+k'=0$: $kx+k'x'=k\overrightarrow{x'x}$,

$kx+\vec{\xi}=k(x+k^{-1}\vec{\xi})$,

其中用到了 $\vec{X}\subset X$ 上的×和+的性质. 在 $\hat{X}$ 中, $\vec{X}$ 是一个超平面. 若定义 $M:\hat{X}\to K$ 为 $M(kx)=k$, $M(\vec{\xi})=0\quad\forall\vec{\xi}\in\vec{X}$,则 M是X上的一个线性形式, 而且 $M^{-1}(1)=X\not\ni 0$. 仿射超平面 $M^{-1}(1)$ (作为仿射空间)同构于 X. 另外,对每个 $a\in X$, $\hat{X}$ 就是直和 $\hat{X}=\vec{X}\oplus Ka$; 若 $q:\hat{X}\to\vec{X}$ 是关于这个直和的首项射影,则由于X与$1\times X\subset\hat{X}$ 是等同的, $q|_X$ 就是 Θ_a (参见 2.1.5).

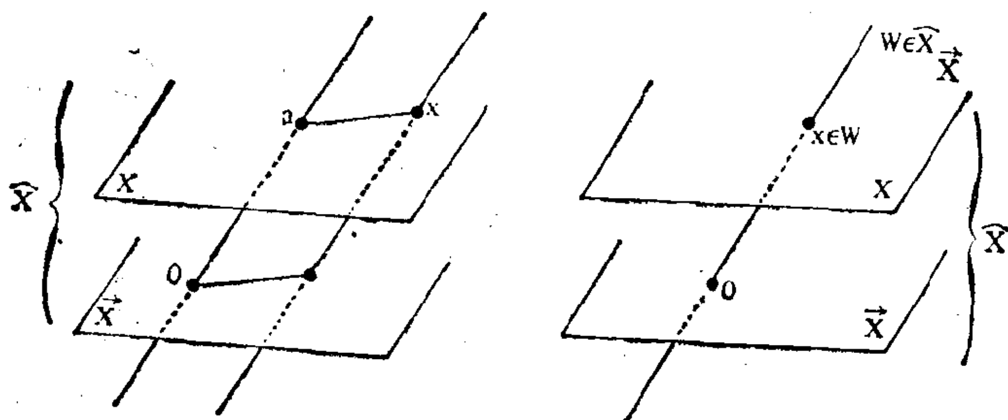


图 3.1.7.

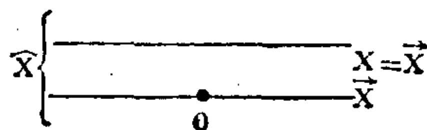


图 3.1.8.

3.1.8 附注. 首先,我们在 3.1.7 中完全证实了 2.1.3.1 所引进的 $xy=y-x$ 的写法是合理的. 要注意到把不同对象等同的做法有时会是危险的; 一个原则是,在可能混淆的情况下,一开始就要重新区分开不同的对象. 一个典型的例子是: 将仿射空间X取成 $X=\vec{X}$ (2.2.1);这时,在 $\hat{X}$ 中,记号 $\vec{X}$ 同时表示仿射子空间

$$\vec{X}=X=M^{-1}(1)$$

和向量子空间（超平面）$\vec{X}$；因此，在这种场合不应该写 $X=\vec{X}$，而必须把 X 和 $\vec{X}$ 区分清楚(图 3.1.8)。

3.1.9 许德拉咬住闪光的尾巴[1]. 从 X 出发，我们作出了泛向量空间 $\hat{X}$，它包含 $\vec{X}$ 作为超平面. 因此，根据 2.2.5，我们可以讨论仿射空间 $\hat{X}_{\vec{X}}$；于是 2.2.7 和 3.1.7 证明了 X 通过下面的两个同构自然同构于 $\hat{X}_{\vec{X}}$: $X\cong M^{-1}(1)$ 和 $M^{-1}(1)\cong\hat{X}_{\vec{X}}$.

3.2 泛空间与仿射映射

现在，设 X, X' 是两个仿射空间；我们作出 $\hat{X}$, $\hat{X}'$ 并找出 $A(X;X')$ 和 $L(\hat{X};\hat{X}')$ 之间的关系。3.1.7 和 2.3.7 已说明了从 $L(\hat{X};\hat{X}')$ 到 $A(X;X')$ 的关系；反之亦然(可直接证明)：

3.2.1 命题. 设 X, X' 是两个仿射空间，$f\in A(X;X')$. 定义映射 $\hat{f}:\hat{X}\to\hat{X}'$ 为 $\hat{f}|_{\vec{X}}=\vec{f}$, $\hat{f}(kx)=k\hat{f}(x)$（分别根据 $X\subset\hat{X}$ 和 $X'\subset\hat{X}'$ 的等同关系），则 $\hat{f}\in L(\hat{X};\hat{X}')$，并且 $\hat{f}\in L_{\vec{X},\vec{X}'}(\hat{X};\hat{X}')$；在 2.3.6 的意义下，由 3.1.8 还有 $\bar{\hat{f}}=f$. 若 $g\in A(X';X'')$，其中 X'' 是第三个仿射空间，则 $\widehat{g\circ f}=\hat{g}\circ\hat{f}$.

3.2.2 这个命题说明了给 $\hat{X}$ 冠以"泛"字的理由；在更确切的意义上说，3.2.1 证明了 $X\to\hat{X}$ 是一个"函子"对应.

3.2.3 推论. 对每个仿射空间 X, X 的仿射群 $GA(X)$ 自然同构于 $GL_{\vec{X}}(\hat{X})=\{f\in GL(\hat{X}):f(\vec{X})=\vec{X}\}$ 关于 $GL(\vec{X})$ 的中心 $K^*\cdot \mathrm{Id}_{\vec{X}}$ 的商群 $GL_{\vec{X}}(\hat{X})/K^*\cdot \mathrm{Id}_{\vec{X}}$（参见 2.3.3.12）.

3.2.4 例. 根据 2.3.3.1 2 的定义，$f\in \mathrm{Dil}(X)$ 的充要条件是

$$\hat{f}|_{\vec{X}}=\mathrm{Id}_{\vec{X}}.$$

3.2.5 2.3.8的解释. 为此，让我们看一下 2.3.8 的条件和记号. 给定 X 的标架 $\{x_i\}_{i=0,1,\cdots,n}$ 后，我们可以作出 X 的两个基，第一个是 $\{x_0, \overrightarrow{x_0x_1},\cdots,\overrightarrow{x_0x_n}\}$，其中 $x_0\in X\subset\hat{X}$, $\overrightarrow{x_0x_i}\in\vec{X}\subset\hat{X}$，第二个是 $\{x_0, x_1,\cdots x_n\}\subset X\subset\hat{X}$；我们在 3.6 中还将用到第二个基. 两个

---

1)许德拉 (Hydre)：希腊神话中的九头怪物，中间一头能砍而复生. 这里，"咬住尾巴"比喻从 X 出发仍可回到与其同构的空间. ——译者注

第一种类型的标架，即 $\hat{X}$ 的 $\{x_0, \overrightarrow{x_0x_1}, \cdots, \overrightarrow{x_0x_n}\}$ 和 $\hat{X}'$ 的

$$\{x_0', \overrightarrow{x_0'x_1'}, \cdots, \overrightarrow{x_0'x_p'}\},$$

可用来解释 2.3.8. 2.3.9 中记为 $M(f)$ 的矩阵，就是 3.2.1 中的 $\hat{f}$ 关于上述两个基的矩阵；因为，若 $x=(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ 本身是在 X 中的，则这个 x 在 $\hat{X}$ 中关于标架 $\{x_0, \overrightarrow{x_0x_1}, \cdots, \overrightarrow{x_0x_n}\}$ 的坐标显然是 $(1, \lambda_1, \cdots, \lambda_n)$，然而，由 2.3.9 可知，$\vec{X}\subset\hat{X}$ 的元素就是第一个坐标是零的那些元素。

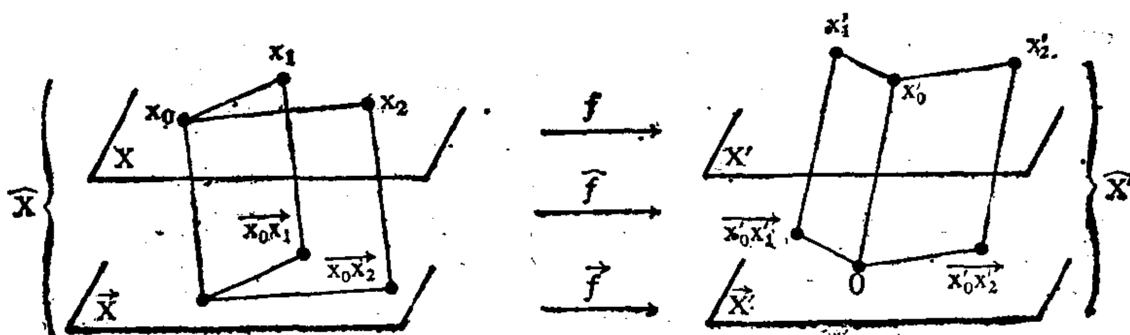


图 3.2.5.

3.3 仿射空间上的多项式

本节中，所有的域都假定是特征数为 0 的.

我们先回顾一下向量空间上的多项式以及多项式映射的定义和性质；[CH1]的第 79 页是很好的参考材料.

3.3.1 复习. 设 V, W 是两个向量空间；映射 $f: V\to W$ 称为 k 阶齐次多项式映射，如果存在一个对称 k 重线性映射 $\varphi: V^k\to W$，使 $f=\varphi\circ\Delta$，其中 Δ 是对角映射 $\Delta: V\ni x\longmapsto(x, \cdots, x)\in V^k$. 把 V 到 W 中的 k 阶齐次多项式映射的集合记为 $\mathscr{P}_k^\bullet(V; W)$；当 $W=K$(V 的基域)时，简称为 k 阶齐次多项式，并记

$$\mathscr{P}_k^\bullet(V)=\mathscr{P}_k^\bullet(V; K).$$

若 f 是齐次多项式映射，则使 $f=\varphi\circ\Delta$ 的映射 φ 是唯一的，也就是说 φ 是由 f 所确定的. 映射 $f: V\to W$ 称为阶数小于或等于 k

的多项式映射，如果存在 $f_i \in \mathscr{P}_i^{\bullet}(V; W)$ $(i=0, 1, \cdots, k)$，使 $f=\sum_{i=0}^{k} f_i$（规定以 $\mathscr{P}_0^{\bullet}(V; W)$ 来记 V 到 W 中的常值映射的集合）. 若 $W=K$，仍简称为阶数小于或等于 k 的多项式. 若 f 是阶数小于或等于 k 的多项式映射，则 $f=\sum_i f_i$ 的写法是唯一的，亦即 $f_i \in \mathscr{P}_i^{\bullet}(V; W)$ 都是由 f 所确定的. 阶数小于或等于 k 的多项式映射的集合记为 $\mathscr{P}_k(V; W)$，$\mathscr{P}_k(V)=\mathscr{P}_k(V; K)$.

3.3.2 注. 借助于 $f: V \to W$，可以写出 $\varphi: V^k \to W$ 的具体算式来，详见［CH1］第 85 页 (6.3.5) 式. $k=2$ 的情形是我们熟知的，$\mathscr{P}_2^{\bullet}(V)$ 的元素 f 称为二次形式；使 $f=\varphi \circ \Delta$ 的 φ 称为 f 的极形式，且有

3.3.2.1

$$\varphi(x, y)=\frac{1}{2}[f(x+y)-f(x)-f(y)] \quad \forall x, y \in V.$$

我们假定域的特征数为 0，是为了保证给定 f 后 φ 是唯一的. 但我们看到，对二次形式来说，只要假定特征数不是 2 就足够了（更一般地，只要知道域的特征数严格地大于所考察的多项式的阶数就可以了）.

向量空间 $\mathscr{P}_1^{\bullet}(V)$ 就是 V 的对偶空间 V^*，即 V 上线性形式的集合. 更一般地，$\mathscr{P}_k^{\bullet}(V; W)$ 赋有自然的(在向量空间中取值的映射全体所构成的)向量空间的结构.

我们有 $f(\lambda x)=\lambda^k f(x)$ $\forall f \in \mathscr{P}_k^{\bullet}(V)$ $\forall x \in V$，这就是我们称之为 k 阶"齐次"的原因，但这一条件不足以使 f 成为一个多项式（除非 f 是足够次可微分的，参见 3.7.12）. 至于为什么称为"多项式"，则正是下面要说明的.

3.3.3 坐标. 假设 V 是有限维的，维数为 n，设 $\{e_i\}_{i=1,\cdots,n}$ 是 V 的一个基，$x=(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ 是 x 关于这个基的坐标，则对

$$f \in \mathscr{P}_k^{\bullet}(V; W),$$

$f(x)$ 有两种可能的写法，每一种都很有用. 第一种写法是

$$f(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) = \sum_{\alpha_1+\cdots+\alpha_n=k} a_{\alpha_1,\cdots,\alpha_n}\lambda_1^{\alpha_1}\cdots\lambda_n^{\alpha_n},$$

和式是对所有以k为和的$\geqslant 0$的整数来作的，其中 $a_{\alpha_1,\cdots,\alpha_n}$ 是W中一些取定的向量（$W=K$时则是一些数量）。第二种写法是

$$f(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) = \sum_{i_1\leqslant\cdots\leqslant i_k} a_{i_1,\cdots,i_k}\lambda_{i_1}\cdots\lambda_{i_k},$$

其中 $a_{i_1,\cdots,i_k}$ 是在W中取定的，和式遍取所有在 1，…，n 中取值且可重复的递增整数。在这两种写法中，出于习惯都把右端记成W上的数量乘法，以使当$W=K$时得到通常的多项式记法。

3.3.4 为了在仿射空间X上定义多项式，最简捷的方法是利用X连带的泛空间 $\hat{X}$；在 3.7.11（参见 3.3.14）中有一个更初等的定义。

3.3.5 **定义**。设X是仿射空间，W是向量空间。映射

$$f: X \to W$$

称为X上k阶多项式映射，如果存在 $\hat{f}\in\mathscr{P}_k^{\bullet}(\hat{X})$ 而 $\hat{f}|_X = f$；它们的集合(自然地成为向量空间)记为 $\mathscr{P}_k(X; W)$。若 $W=K$，就称为k阶多项式，它们的集合记为 $\mathscr{P}_k(X)=\mathscr{P}_k(X; K)$。$f$的符号记为$\vec{f}$，指$k$阶齐次多项式映射：$\vec{f}=\hat{f}|_{\vec{X}}$。

3.3.6 **例**。$\mathscr{P}_0(X; W)$ 的元素是常值映射，$\mathscr{P}_1(X; W)$ 的元素跟 $A(X; W)$ 的元素是一样的，特别地，$\mathscr{P}_1(X)$ 就是X的仿射形式的集合(要说明这一点，可直接验证或利用 3.3.14)。这说明(参见 3.3.2)我们把 $\mathscr{P}_2(X)$ 的元素称为二次仿射形式是合适的。

3.3.7 定义 3.3.5 是简捷明瞭的，但常常并不实用；而且，我们想研究限制映射 $\mathscr{P}_k^{\bullet}(\hat{X})\to\mathscr{P}_k(X)$，根据定义它是满射，但它是单射吗？我们还要写出有限维情形的具体算式，看一下跟 $\mathscr{P}_k(X_a)$ 的关系，其中 X_a 是X在a点的向量化空间。于是，我们取定 $a\in X$ 并利用直和关系 $\hat{X}=\vec{X}\oplus Ka$（参见 3.1.6）；为简便起见，我们在 $\mathscr{P}_k(X)$ 中讨论。设 $\hat{\varphi}: \hat{X}_k\to K$ 使得 $\hat{f}=\hat{\varphi}\circ\Delta$；我们有

3.3.8

$$\hat{\varphi}(\vec{\xi}_1+t_1a, \cdots, \vec{\xi}_k+t_ka)$$

$$= \sum_{i=0}^{k} \sum_{l_1<\cdots<l_i} \prod_{s\neq l_1,\cdots,l_i} t_s \hat{\varphi}(\vec{\xi}_{l_1}, \cdots, \vec{\xi}_{l_i}, a, \cdots, a)$$

(这里用到了 φ 的对称性)。对 $i = 0, 1, \cdots, k$，令:

3.3.9

$$\varphi_i: X_a^i \ni (\vec{\xi}_1 + a, \cdots, \vec{\xi}_i + a) \longmapsto \binom{k}{i} \hat{\varphi}(\vec{\xi}_1, \cdots, \vec{\xi}_i, a, \cdots, a).$$

每个映射 φ_i 都是 i 重线性的对称映射，因此可定义

$f_i = \varphi_i \circ \Delta: X_a \to K$，而 $f_i \in \mathscr{P}_i^{\bullet}(X_a)(i = 0, 1, \cdots, k)$，

由 3.3.8 就有:

3.3.10

$$f = \sum_{i=0}^{k} f_i.$$

因而，若 $f \in \mathscr{P}_k(X)$，只要 $a \in X$，f 就是 X_a 上一个阶数小于或等于 k 的多项式。我们可以看到逆命题也成立，而且 3.3.8 式使我们能从 f 唯一地作出 $\hat{f}$。事实上，若

$$a \in X, \ f_i \in \mathscr{P}_i^{\bullet}(X_a)(i = 0, 1, \cdots, k),$$

$f = \sum_{i=0}^{k} f_i$，若 $f_i = \varphi_i \circ \Delta$ 而 $\varphi_i: X_a^i \to K$，则令

3.3.11

$$\hat{\varphi}(\vec{\xi}_1 + t_1 a, \cdots, \vec{\xi}_k + t_k a)$$
$$= \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i}^{-1} \sum_{l_1<\cdots<l_i} \prod_{s\neq l_1,\cdots,l_i} t_s \varphi_i(\vec{\xi}_{l_1} + a, \cdots, \vec{\xi}_{l_i} + a).$$

若 $\hat{f} = \hat{\varphi} \circ \Delta$，则有: $\hat{f}|_X = f$；可以验证 $\hat{\varphi}$ 是 k 重线性的对称映射。于是，若 $t \neq 0$，就有:

3.3.12

$$f(\vec{\xi} + ta) = \sum_{i=0}^{k} t^{k-i} f_i(\vec{\xi} + a) = t^k \sum_{i=0}^{k} f_i(t^{-1}\vec{\xi} + a)$$

$$= t^k \sum_{i=0}^{k} f_i(t^{-1}(\vec{\xi} + a)) = t^k f(t^{-1}(\vec{\xi} + a)),$$

由此可知，当把 X_a 和 $\vec{X}$ 通过 Θ_a 等同起来时，有：

3.3.13 $\hat{f}(\vec{\xi}, t) = t^k f(t^{-1}\vec{\xi}) \quad \forall x \in X \quad \forall t \in K^*$ 和 $\hat{f}|_{\vec{X}} = \bar{f}$.

根据这个式子，我们说："$\hat{f}$ 是通过变量 t 将 f 齐次化后得到的"，或者"$\hat{f}$ 是通过引进一个齐次化变量 t 而得到的"，再根据 3.3.12，就可从 f_i 具体算出 $\hat{f}$. 因此，由上述论证推得下面的

3.3.14 命题. 限制映射

$$\mathscr{P}_k^\bullet(\hat{X}) \ni \hat{f} \longmapsto \hat{f}|_X \in \mathscr{P}_k(X)$$

是双射；其逆映射由 3.3.13 式表出. $\mathscr{P}_k(X)$ 的元素有以下特征：$f: X \to K$，使对任一 $a \in X$ 有 $f \in \mathscr{P}_k(X_a)$，或存在 $a \in X$ 使 $f \in \mathscr{P}_k(X_a)$. 通过 Θ_a 的作用可以看到，f 的 k 阶部分就是 f 的符号 $\bar{f}$.

3.3.15 例. 设 X 是有限维的，维数为 n，$\{x_i\}_{i=0,1,\cdots,n}$ 是 X 的一个标架，$(\lambda_i)_{i=0,\cdots,n}$ 是这个标架下的坐标，则 $f \in \mathscr{P}_2(X)$ 的充要条件是存在 $a_{ij}, b_i, c \in K (i, j = 1, \cdots, n)$ 使得

$$f(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) = \sum_{i,j} a_{ij}\lambda_i\lambda_j + \sum_i b_i\lambda_i + c,$$

从而 $\hat{f}$ 为：

$$\hat{f}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n, t) = \sum_{i,j} a_{ij}\lambda_i\lambda_j + \sum_i b_i\lambda_i t + ct^2.$$

3.4 重　　心

将仿射空间 X 嵌入向量空间 $\hat{X}$ 后，就可计算 $\sum_i \lambda_i x_i$ 这样的线性组合，其中 $x_i \in X$，$\lambda_i \in K$；如果(参见 3.1.6)

$$M\left(\sum_i \lambda_i x_i\right) = \sum_i \lambda_i M(x_i) = \sum_i \lambda_i = 1,$$

前述组合的结果(当然在 $\hat{X}$ 中)是在 X 中的. 由此有：

3.4.1 定义. 设 $\{x_i\}_{i\in I}$ 是仿射空间 X 中点的集合，$\{\lambda_i\}_{i\in I} \subset K$，这里除有限个 i 外 $\lambda_i = 0$，而且 $\sum_{i\in I} \lambda_i = 1$. X 中的点 x 称为承

载质量 λ_i 的点 x_i 的重心：$x=\sum_{i\in I}\lambda_i x_i$。

3.4.2 例. 若除 $\lambda_1=1$ 外所有的 $\lambda_i=0$，则重心 x 就是 x_1；若 $I=\{1,2\}$，$\lambda_1=\lambda_2=1/2$（从而 K 的特征数不为 2），就有

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},$$

称为 $\{x_1x_2\}$ 的中心。更一般地，若在 K 中 $I=\{1,\cdots,n\}$，$n\neq 0$，$\lambda_i=\frac{1}{n}$ $\forall i$，则点 $x=\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}$ 称为 x_i 的质心.

要注意到，若 X 是欧氏仿射平面，三角形 $\{x_1,x_2,x_3\}$ 的质心 $\frac{x_1+x_2+x_3}{3}$（参见 2.4.7）是跟这个三角形所决定的均匀薄板的质心（参见 2.7.5.3）重合的，然而，

$$\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}$$

一般不再是这四点所决定的均匀薄板的质心。

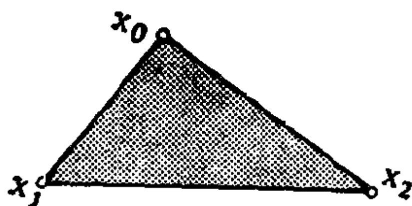


图 3.4.2.1.

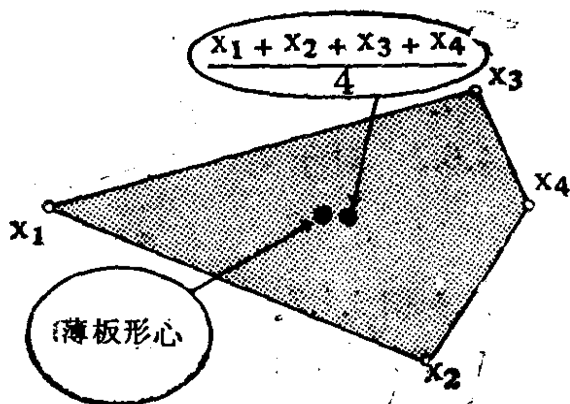


图 3.4.2.2.

请参阅第 171 页上为数众多的重心的例子.

3.4.3 一个基本的例子是 $K=\mathbf{R}$，X 是实仿射空间而 x，y 是 X 的两点的情形. X 的子集 $[x,y]=\{\lambda x+(1-\lambda)y:\lambda\in[0,1]\}$ 称为以 x，y 为端点的线段. 这是引进凸性概念的起点：参见第 11 章和第 12 章.

3.4.4 现在假定 $\sum_i\lambda_i\neq 1$，则重心落在 $\hat{X}\setminus X$ 中；这一点是很

有用的，尤其是因为我们注意到，有时会在X中碰到将$\sum_i \lambda_i x_i$乘以数量$\left(\sum_i \lambda_i\right)^{-1}$（如果它不是零）的情形。

3.4.5 定义. 把$\hat{X} = \vec{X} \cup (K^* \times X)$的元素称为$X$的**承重点**。如果$\{(\lambda_i, x_i)\}_{i=1,\cdots,n}$是一族有限多个承重点，就把承重点$\left(\sum_i \lambda_i, x\right)$称为**重心**，其中，当$\sum_i \lambda_i = 0$时$x$是向量$\sum_i \lambda_i x_i \in \vec{X}$，当$\sum_i \lambda_i \neq 0$时$x$是点

$$\left(\sum_i \lambda_i x_i\right) \Big/ \left(\sum_i \lambda_i\right) \in X.$$

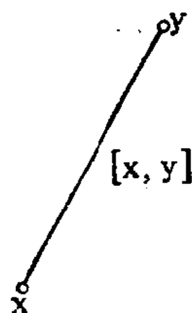


图 3.4.2.3.

3.4.6 注

3.4.6.1 我们注意到，$\sum_i \lambda_i \neq 0$时，重心的概念是跟力学上的概念一致的；具有单位质量的三个点x_i的质心就是$\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$，不过这一点应承载3个单位的质量，即$x_i$处质量之和。

3.4.6.2 对于两点$\{(1, x), (-1, y)\}$，我们又看到

$$\overrightarrow{yx} = x - y,$$

参见2.1.4和3.1.7。

3.4.6.3 当然，我们的定义跟更古典的定义也是呼应的；那种定义研究的是和式$\sum_i \lambda_i \overrightarrow{yx_i}$，而不是向量场。若$x$是$\{(\lambda_i, x_i)\}$ $\left(\sum_i \lambda_i \neq 0\right)$的重心，我们甚至从定义直接就有：

3.4.6.4 $$\sum_i \lambda_i \overrightarrow{yx_i} = \left(\sum_i \lambda_i\right) \overrightarrow{yx} \quad \forall y \in X,$$

x则满足下列方程：

3.4.6.5 $$\sum_i \lambda_i \overrightarrow{xx_i} = 0.$$

3.4.6.6 最后，通过将X在任一点 $a\in X$ 处向量化，我们就得到了 $\{(\lambda_i, x_i)\}$ $\left(\sum_i \lambda_i \neq 0\right)$ 的重心 x 的具体计算公式：

$$x = a + \frac{\sum_i \lambda_i \overrightarrow{ax_i}}{\sum_i \lambda_i}.$$

如果 X 还是有限维的，且 x_i 在某个给定的仿射标架中的坐标为 $(x_{i1}, \cdots, x_{in})$，那么在同一标架中，$\{(\lambda_i, x_i)\}$ $\left(\sum_i \lambda_i \neq 0\right)$的重心坐标为

$$\left(\frac{\sum_i \lambda_i x_{i1}}{\sum_i \lambda_i}, \cdots, \frac{\sum_i \lambda_i x_{in}}{\sum_i \lambda_i}\right).$$

3.4.7 向量空间(现在是 X)中的加法满足结合律这一事实，可以从重心的性质来推出；这些性质在力学上有直观的解释，并且在几何上有很多有趣的应用.

3.4.8 命题(承重点的重心的结合性). 设 I 是有限集，

$$I = I_1 \cup \cdots \cup I_p$$

是 I 的一个划分，$\{(\lambda_i, x_i)\}_{i\in I}$ 是一族承重点，则这族点的重心就是 $\{(\mu_l, \xi_l)\}_{l=1,\cdots,p}$ 的承重点重心，其中，对每一l，承重心 (μ_l, ξ_l) 是 $\{(\lambda_i, x_i)\}_{i\in I_l}$ 的重心.

3.4.9 命题 (X中重心的不可结合性). 设 I 是有限集，

$$I = I_1 \cup \cdots \cup I_p$$

是 I 的一个划分，$\{x_i\}_{i\in I}$ 是X中的点集，$\{\lambda_i\}_{i\in I_l}$ 是K中点集并使 $\sum_{i\in I_l} \lambda_i = 1 \quad \forall l = 1, \cdots, p$. 设 $\alpha_1, \cdots, \alpha_p \in K$ 且 $\sum_l \alpha_l = 1$，ξ_l 是承载 λ_i 的点 $x_i (i\in I_l)$ 的重心，ξ 是承载 α_l 的点

$$\xi_l (l = 1, \cdots, p)$$

的重心，则 ξ 是承载 $\alpha_l \lambda_i (i\in I_l)$ 的点 $x_i (i\in I)$ 的重心.

3.4.10 经典几何学的结论. 首先，设 x_1, x_2, x_3 是X中三点，

$$I = \{1, 2, 3\} = \{1\}\cup\{2, 3\},\ \lambda_1 = 1,$$
$$\lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1}{2},\ \alpha_1 = \frac{1}{3},\ \alpha_2 = \frac{2}{3}$$

(从而K的特征数不为 2 或 3)，则 $\xi_1 = x_1$，$\xi_2 = \dfrac{x_2 + x_3}{2}$是$\{x_2, x_3\}$的中心，因而承载质量$\{1/3, 1/3, 1/3\}$的点 x_1，x_2，x_3 的重

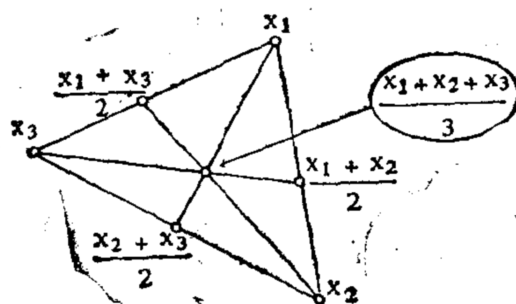


图 3.4.10.1.

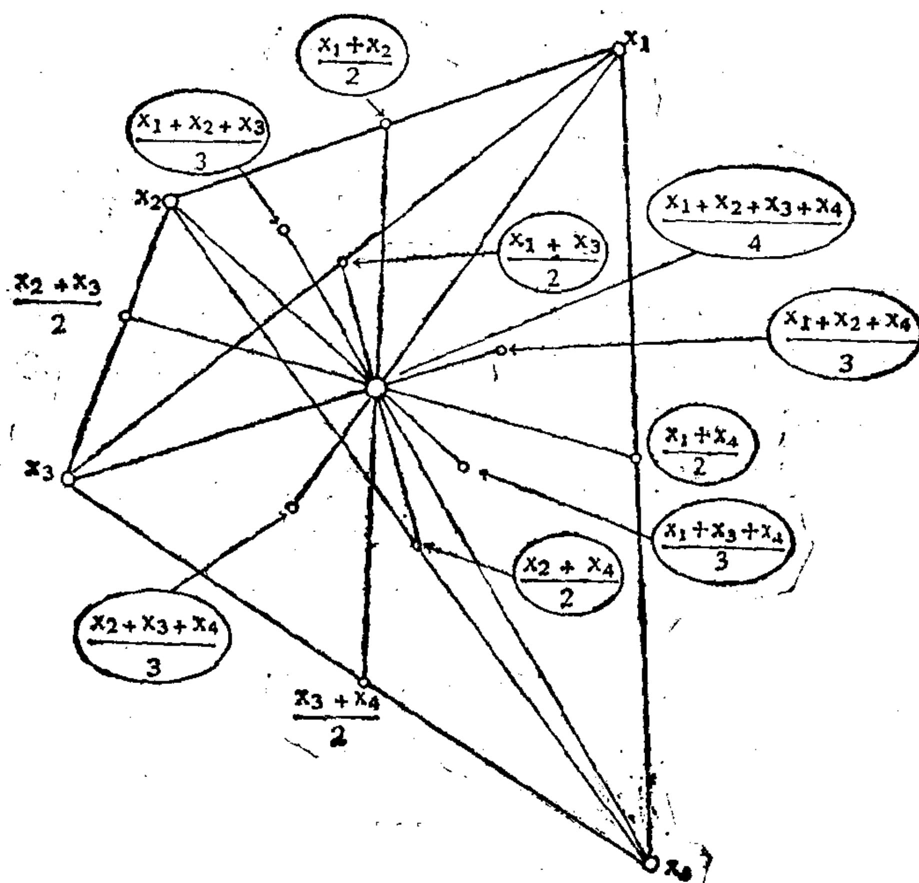


图 3.4.10.2.

心 x,即这三点的质心,就是承载质量 1, 2 的点 x_1, $\frac{x_2+x_3}{2}$ 的重心; 几何上的结论是三条中线 $\left\langle x_1, \frac{x_2+x_3}{2}\right\rangle$, $\left\langle x_2, \frac{x_3+x_1}{2}\right\rangle$, $\left\langle x_3, \frac{x_1+x_2}{2}\right\rangle$ 交于一点,这一点就是三角形 $\{x_1, x_2, x_3\}$ 的质心,它将每条中线分成分比为$\{1, 2\}$的线段. 其次,在四点的情形,我们就得到(假定K的特征数不是 2 或 3) 七线共点, 这七条线是三组对边的中心连线和各点与其余三点所成三角形的质心的连线.

3.5 重心与仿射映射,重心与仿射子空间

3.5.1 命题. 设X,X'是两个仿射空间, $f:X\to X'$ 是一个映射(目前仅仅是在集论意义下的). 则 f 成为仿射映射的充要条件是 f 保持重心,也就是说,对任意两个有限点集 $\{x_i\}_{i\in I}\subset X$, $\{\lambda_i\}_{i\in I}\subset K$, 其中 $\sum_i \lambda_i = 1$, 有

$$f\left(\sum_i \lambda_i x_i\right) = \sum_i \lambda_i f(x_i).$$

必要性由 3.2.1 和 3.4.1 可得. 为证充分性,要证 $f:X_a\to X'_{f(a)}$ 线性. 为此, 只须注意到, 若 $x, x'\in X$, λ, $\mu\in K$, 则 X_a 中使 $x''=\lambda x+\mu x'$ 的点 x'' 正是承载质量 $\{1-\lambda-\mu, \lambda, \mu\}$ 的 $\{a, x, x'\}$ 的重心(对 $f(a)$, $f(x)$, $f(x')$ 有相仿的结论)!

上述证明过程还证明了:

3.5.2 命题. 设X是仿射空间, $S\subset X$ 是X的子集. 则S是X的子空间的充要条件是S中任何点集的重心落在S中,也就是说,对任何两个有限点集 $\{x_i\}_{i\in I}\subset S$ 和 $\{\lambda_i\}_{i\in I}\subset K$, 其中 $\sum_i \lambda_i = 1$, 总有 $\sum_i \lambda_i x_i\in S$.

3.5.3 推论. 对X的一个子集S来说, 由S所生成的子空间, 即$\langle S\rangle$, 就是S中所有的点(关于所有可能承载的质量)的重心的集

合。

这样，由相互独立的两点 x, y 所生成的直线 $D=\langle x, y\rangle$，就是 $D=\langle x, y\rangle=\{\lambda x+(1-\lambda)y: \lambda\in K\}$。

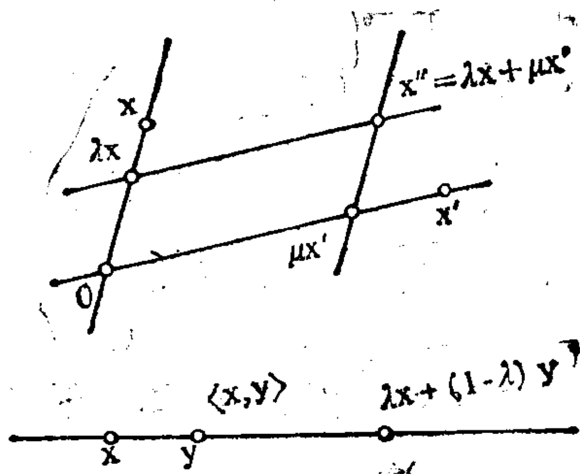


图 3.5.2.

3.5.4 命题．设 X 是特征数为 0 的域上的仿射空间．若 $F\subset X$ 是任一子集，则存在一点 $x\in X$，使 $\mathrm{GA}_F(X)\subset \mathrm{GA}_x(X)$，也就是说，对任一使 $f(F)=F$ 的 $f\in \mathrm{GA}(X)$ 总有 $f(x)=x$。

若 $K=\bigcup_{i=1}^{n} x_i$，取 $x=\dfrac{x_1+\cdots+x_n}{n}$ 并应用 3.5.1。

将 3.5.4 推广到紧集 F 的情形，参见 2.7.5.7 和 9.8.6．一个有趣的推论是 3.7.3。

3.6 重心坐标

3.6.1 我们现在要用到 3.2.5 中引进的概念，即在有限 n 维的仿射空间 X 中给定一个仿射标架 $\{x_i\}_{i=0,1,\cdots,n}$ 后，$\hat{X}$ 中有对应的基 $\{x_i\}_{i=0,1,\cdots,n}$． 由此就有：

3.6.2 命题． 设 $\{x_i\}_{i=0,1,\cdots,n}$ 是仿射空间 X 的一个标架． 只要 $x\in X$，总存在 K 中的 $\lambda_i(i=0, 1, \cdots, n)$，使

$$\sum_i \lambda_i=1 \text{ 且 } x=\sum_i \lambda_i x_i;$$

这些 x_i 是唯一确定的，称为 x 在该标架中的重心坐标。

事实上，$x=\sum_i \lambda_i x_i$ 在 X 中，但由于 $x\in X\subset\hat{X}$，就有 $\sum_i \lambda_i=1$（参见 3.1.6）。

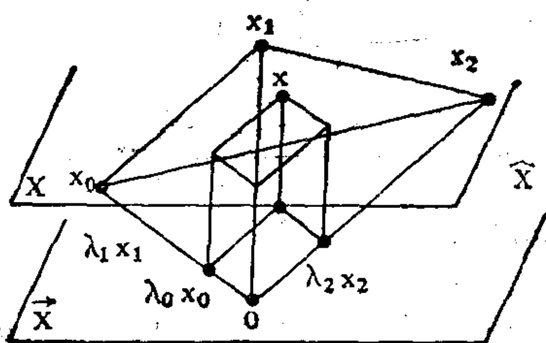


图 3.6.2.1.

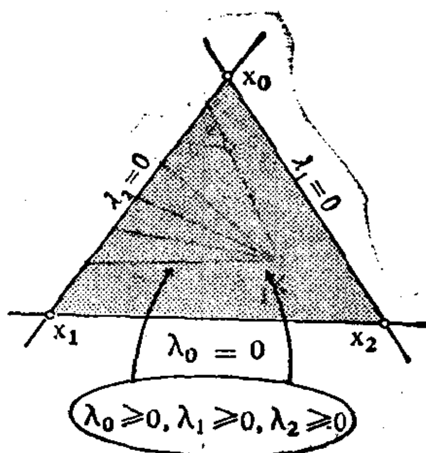


图 3.6.2.2.

3.6.3 例如，若 $n=2$，标架 $\{x_0, x_1, x_2\}$ 中坐标 $\lambda_0=0$ 的点，就是属于三角形 $\{x_0, x_1, x_2\}$ 的边 $\langle x_1, x_2\rangle$ 的那些点。若还有 $K=\mathbf{R}$，则 $\lambda_i\geqslant 0\quad\forall i=0, 1, 2$ 的点就是图 3.6.2.2 中加网点部分的点；在讨论凸性时，我们还会用到这个重要的注脚：参见 11.1.8.4。

3.6.4 在 10.6.8 中将用到重心坐标。

3.6.5 **重心重分。** 重心在代数拓扑中有很重要的应用；有关内

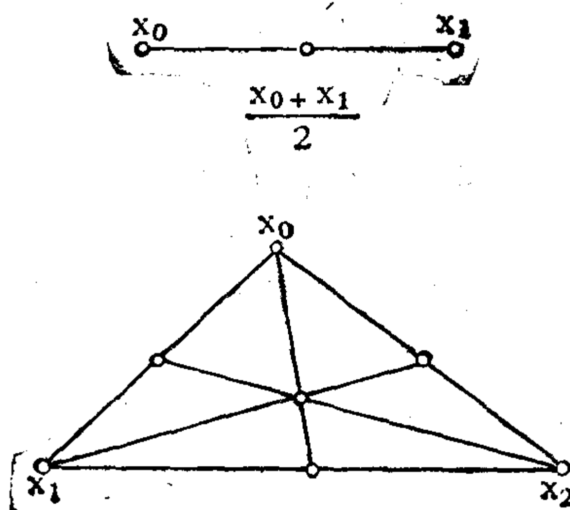


图 3.6.5.1.

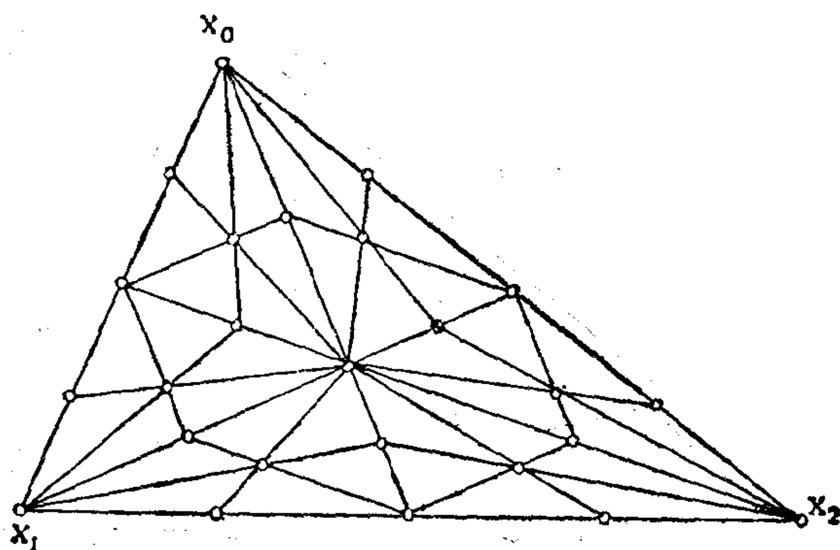


图 3.6.5.2.

容例如可详见 [GG]，第 63 — 68 页和 60 — 63 页，[H-Y]，第 206—209 页或 [CA]，第 82—86 页。一个单形的**重心重分**是通过对所讨论的实仿射空间的维数进行归纳法来定义的：若 $d=1$，$\{x_0, x_1\}$ 的重心重分是两个单形 $\left\{x_0, \frac{x_0+x_1}{2}\right\}$，$\left\{\frac{x_0+x_1}{2}, x_1\right\}$ 的集合。若 $d=2$，重心重分就是六个三角形的集合，这六个三角形有一个公共顶点 $\frac{x_0+x_1+x_2}{3}$，而且各有一边就是三边 $\langle x_0, x_1\rangle$，$\langle x_1, x_2\rangle$，$\langle x_2, x_0\rangle$ 所代表的三个一维单形的重心重分；依次类推。

图 3.6.5.2 画出了 $\{x_0, x_1, x_2\}$ 的重心重分的重心重分，共有 $6\times 6=36$ 个三角形。参见练习 3.7.8.

3.7 练　　习

3.7.1 如果基域特征数不为 0，命题 3.5.4 是否还能成立？

3.7.2 将 3.4.10 的几何结论分别推广到五个点和六个点的情形。

3.7.3 设 X 是特征数为 0 的域上的仿射空间。证明 GA(X) 的任一有限子群必容有一个不动点

3.7.4 我们用 2.7.5.2 中引进的记号。设 X 是有限维实仿射空

间，K 是 X 中内部非空的紧子集，而且 $K=\bigcup_{i=1}^{n} K_i$，其中所有的 K_i 内部非空，且所有的交集

$$K_i \cap K_j \quad (i \neq j)$$

都是零测度的. 证明 $\mathrm{cent}'(K)$ 是承载质量 $\mu(K_i)$ 的点 ξ_i 的重心，其中 $\xi_i=\mathrm{cent}'(K_i)$.

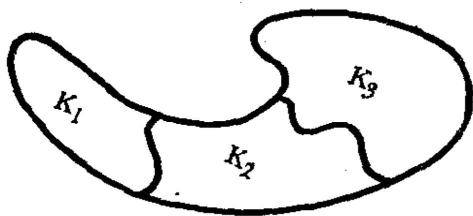


图 3.7.4.

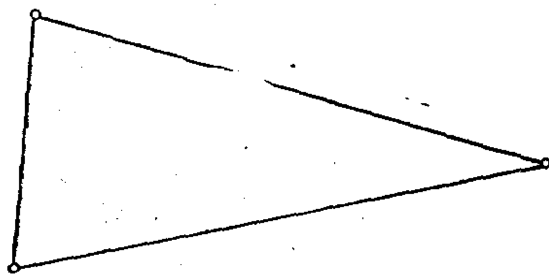


图 3.7.13.

3.7.5 设 X 是仿射空间. 分别给出 $\mathscr{P}_1(X)$ 和 $\mathscr{P}_2(X)$ 中元素 f 的内在定义(也就是说，既不用到向量化空间 X_a，也不用到 $\hat{X}$)；再给出一个计算 f 的符号 $\bar{f}$ 的公式.

3.7.6 为什么在定义 3.1.2.2 中采用场

$$x \longmapsto k\overrightarrow{xa}$$

而不采用场 $x \longmapsto k\overrightarrow{ax}$?

3.7.7 设 X 是仿射空间，$a, b \in X$，$f \in \mathscr{P}_k(X)$. 在 X_a 中记

$$f \doteq \sum_{i=0}^{k} f_i \quad \text{其中 } \forall i \quad f_i \in \mathscr{P}_i^{\bullet}(X_a),$$

在 X_b 中同样有 $f=\sum_i g_i$. 对 $k=1$ 和 2 的情形，具体地把 g_i 写成 f_i 和 $\xi=\overrightarrow{ab}$ 的函数式. 讨论 X 赋有仿射标架的情形.

3.7.8 设 Σ 是 n 维欧氏仿射空间的一个单形；d 表示它的直径(参见 0.3). 证明 Σ 的重心重分的所有单形的直径都小于或等于

$$\frac{nd}{n+1};$$

由此推出，当反复进行重心重分时，所有单形的直径趋向于零.

3.7.9 给出 $k=3$ 时的 3.3.2.1 的一般式。

3.7.10 证明 $\dim E=n$ 时,对任何的 k 有:

$$\dim\mathscr{P}_k^{\bullet}(E)=\binom{n+k-1}{k},\ \dim\mathscr{P}_k(E)=\binom{n+k}{k}.$$

3.7.11 直接证明:若对集 $a\in X$, $f:X\to W$ 属于 $\mathscr{P}_k(X_a;W)$,则 $f\in\mathscr{P}_k(X_b;W)\quad\forall b\in X$.

3.7.12 设 X 是实向量空间, $f:X\to\mathbf{R}$ 是 C^1 类的并使

$$f(\lambda x)=\lambda^k f(x)\quad\forall x\in X\quad\forall\lambda\in\mathbf{R}.$$

证明 f 的导数 f' 满足 Euler 恒等式: $f'(x)(x)=\lambda f(x)\quad\forall x\in X$. 在 f 是 C^p 类且 k 阶齐次的情形下,写出并证明类似的关于 f 的 p 阶导数的公式. 由此推出,若 f 是 C^k 类且 k 阶齐次的,则 f 一定是一个多项式.

3.7.13 一个三角形的三边各是具有相同密度的均匀细杆,试决定这个力学构件的质心。说明该点的几何作图法.

3.7.14 说明一个四边形 (图 3.4.2.2) 所代表的均匀薄板的质心的几何作图法.

3.7.15 在 3.3.1 的记号下,证明对任一 $f\in\mathscr{P}_k^{\bullet}(V;W)$, 有

$$\varphi(v_1,\cdots,v_r)=\frac{1}{r!}\sum_{k=1}^{r}(-1)^{r-h}\sum_{1\leqslant i_1\leqslant\cdots\leqslant i_k\leqslant r}f(v_{i_1}+\cdots+v_{i_k}).$$

3.7.16 在一个实仿射空间中给定 p 个点 $x_{1,1},\cdots,x_{1,p}(p\geqslant 2)$. 对 $i=1,2,\cdots,p$, $x_{2,i}$ 表示 $(x_{1,j})_{j\neq i}$ 的质心. 然后,用归纳法对所有的 $k\geqslant 1$ 定义 $(x_{k,j})_{j\neq i}$ 的质心 $x_{k+1,i}$. 证明每个序列 $(x_{k,i})_{k\in\mathbf{N}}$都是收敛的;若极限为 m_i,试比较这些 m_i.

第4章 射影空间

本章是讲射影空间的，先有一段引言（4.0），旨在说明4.1中何以会引进一个看似突兀的定义；后一节中还有不少例子．接下去的两节4.2和4.3都很长，其中描述了射影空间的性态，以使读者能形成一个比较具体的概念，并且理解到射影空间在今天所起的作用，已经比它当初脱胎而来的纯初等几何大得多了．4.2节描述了自然坐标图；4.3节讲了有限维的实或复的射影空间以及它们的拓扑．作为一本有意写得比较初等的书，我们仅限于证明一些点集拓扑的性质；但对这些射影空间的代数拓扑性质，也作了一定的叙述．根据这些提示，也许再借助于书中提到的参考文献，希望读者能领会到现代的数学中引进射影空间究竟意义何在（尽管自这些空间诞生以来，关于它们的讨论的重心已有所转移）．

接下去的几节，又回到经典的内容，因而讲得较快：射影空间的态射与子空间以及它们的初等性质．最后一节（4.8）从非交换体的角度作了讨论．

4.0 引 言

下面从几个方面来说明为什么要引进射影几何以及定义4.1.1何以会那么突兀地给出．

4.0.1 仿射几何在有些方面是不够完善的：特别是子空间的交有很多例外情形，在2.4.2.4，2.4.9.2和2.4.9.4各节都可以看到这个问题．所以我们希望有一种几何，在这种几何里，两个子空间的交总是一个子空间，而且2.4.9.2中关于维数的最后一个关系式总是成立的．

4.0.2 历史上，Desargues领先大约两个世纪，第一个在实仿射平

面中补加进无穷远点，亦即对每族平行直线给出无穷远处的一个点，使这族直线在射影意义下相交于这一点，从而构造出射影空间(图 4.0.2). 这种构造是第五章的讨论内容.

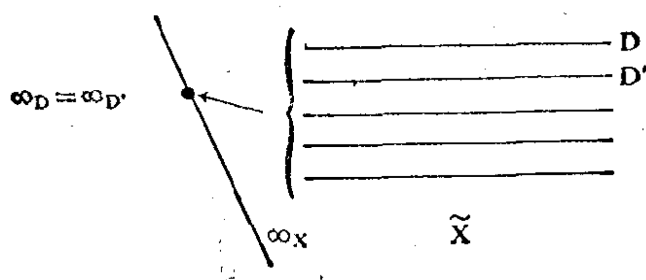


图 4.0.2.

4.0.3 在几何上我们很自然地会对经过一个定点的直线的集合，或者等价地说，对一个给定的向量空间 E 中一维向量子空间的集合 $G_{E,1}$，发生兴趣；这种集合，举例来说，在研究曲线上一点处的切线时是会遇到的：见 4.3.4. 我们在 4.1.1 中将给出的射影空间的定义恰恰就是 $G_{E,1}$ 的定义.

4.0.4 我们的视野不是平面的，而是以眼睛为中心伸展出去的圆锥体. 因此，应该知道怎样来调整从两个不同的中心点(比如说是在同一平面上的)出发的两个视象之间的关系；这是跟透视的概念相关的，也涉及航空摄影的内容，参见第 4.7 节.

4.0.5 通过(比如说)把二次曲面跟二次形式联系起来，我们可以看到射影几何跟线性代数之间的有趣的(在历史上也是很重要的)对照(例如可参见 14.1)；除此之外，实数域或复数域上的射影空间在微分几何、代数拓扑(参见配边理论)中，当然也在代数几何中，起着根本的作用. 它们的好处之一在于，它们是球面以外最简单的紧流形. 关于这方面的现代的参考文献，举例来说有 [GG]，[HU]，[B-H].

4.0.6 射影空间很自然地在量子力学中有所应用，例如可参见 [C-D-L]，第 219 页.

4.1 定义和例子

4.1.1 定义. 设 E 是向量空间. 关于等价关系 $\mathfrak{R}: x\mathfrak{R}y$ 当且仅当 $y=\lambda x \quad \forall \lambda \in K$ 所作的商空间 $(E\backslash 0)/\mathfrak{R}$ 称为由 E 导出或生出的射影空间, 记为 $P(E)$. 一个射影空间 (简称), 就是指一个 $P(E)$. $P(E)$ 的维数定义为 $\dim E-1$. 规范投影是 $p: E\backslash 0 \to P(E)$.

4.1.2 注意. 在 4.2.1 和 5.1.3 中我们要说明上述维数的定义是合理的; 这个定义也是很自然的, 因为 $P(E)$ 作为以直线为元素的集合,要减少一维.

有些读者也许会不喜欢 4.1.1 的定义, 因为这样定义射影空间,总得先有一个导出它的向量空间, 在 [BI5], AII138 页可以找到射影空间的另一种定义,也许会比较使人满意,不过代价是太累赘;也可参见 4.8.3.

最后,跟仿射空间的情形一样,也可用公理化体系来研究射影空间;我们在 2.6.7 中已经给出有关的参考文献.

4.1.3 例

4.1.3.1 对任一 $n \geqslant 1$, 令 $P^n(K)=P(K^{n+1})$, 称之为域 K 上的 n 维标准射影空间.

4.1.3.2 $K=\mathbf{R}$ 时射影空间称为实的, $K=\mathbf{C}$ 时称为复的.

4.1.3.3 射影空间为 0 维时, 称为一点; 为 1 维 (相应地, 2 维)时,称为一条射影直线(相应地,一个射影平面).

4.1.3.4 射影空间 $P(E)$ 与 $G_{E,1}$ (参见 1.2.5)之间有一个自然的双射,必要时,我们将两者视为等同的.

4.1.3.5 根据 2.4.8.1 和 2.4.8.6, 向量空间 E 的所有超平面与 $P(E^*)$ 之间有一双射, 这里 E^* 是 E 的对偶空间. 将 E 的超平面的集合记为 $\mathscr{H}(E)$, 这个双射就是 (以后有需要时将双方视为等同)

$$\mathscr{H}(E) \to P(E^*).$$

4.1.3.6 设 $\mathscr{P}_k(X)$ 是仿射空间 X 上所有 k 阶多项式所成的向量空间(参见 3.3.5), N 是核映射

$$N:\mathscr{P}_k(X)\to X \text{ 的子集全体},$$

它将 $f\in\mathscr{P}_k(X)$ 映成 f 的核 $f^{-1}(0)\subset X$. 因为对所有的 $\lambda\in K^*$ 有 $(\lambda f)^{-1}(0)=f^{-1}(0)$, 我们就得到一个因子分解

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{P}_k(X)\backslash 0 & \xrightarrow{N} & \\ \downarrow p & & X \text{ 的子集全体}. \\ P(\mathscr{P}_k(X)) & \xrightarrow{\underline{N}} & \end{array}$$

以后我们会看到,在有些情形下 $\underline{N}$ 是单射(参见 14.1.6); $k=2$ 时这个单射的象就定义为 X 的二次曲面. 现在, 如果 V 是一个向量空间, 我们注意到(参见 3.3.2) $f(\lambda x)=\lambda^k f(x)$ $\forall f\in\mathscr{P}_k^\bullet(V)$, 就很自然地会对核映射 $\mathscr{P}_k^\bullet(V)\to V$ 的子集全体来考虑下面的交换图:

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{P}_k^\bullet(V)\setminus 0 & \xrightarrow{N} & V \text{ 的子集全体} \\ \downarrow p & \nearrow \underline{N} & \downarrow \\ P(\mathscr{P}_k^\bullet(V)) & \xrightarrow{\underline{N}} & P(V) \text{ 的子集全体}, \end{array}$$

因为每个 $f^{-1}(0)$ 实际上是 V 中的一个锥. 在第 14 和 15 章里还会碰到上面的两个图.

4.1.3.7 设 K 是有 $k=\#K$ 个元素的有限域, $P(E)$ 是 K 上的 n 维射影空间.则 $\#P(E)=\dfrac{k^{n+1}-1}{k-1}$,因为 $\#K^{n+1}=k^{n+1}$, 而每条直线(除去原点后)有 $k-1$ 个元素. 例如, $\mathbf{Z}_2$ 上每条射影直线有三个点,每个平面有七个点(参见 4.6.16).

4.2 射影空间的性状: 坐标图

4.2.1 设 $P(E)$ 是射影空间;若 $H\subset E$ 是一个超平面,根据 2.2.5, 我们可以说, $E_H=G_{E,1}\backslash G_{H,1}=P(E)\backslash P(H)$ 是 $P(E)$ 的一个子集,甚至几乎就是 $P(E)$ 本身. 但 $E_H\subset P(E)$ 自然是一个仿射空

间；换句话说，如果我们用一个仿射空间的点来代表 $P(E)$ 的点，只不过是漏掉 $P(H)$ 的点而已；而这样一来，计算也好，取标架也好，…，都要方便得多．我们说，双射 $P(E)\backslash P(H)\to E_H$ 是 $P(E)$ 的一个**坐标图**．倘若想得到整个 $P(E)$，就得以所有的坐标图域来覆盖 $P(E)$；假设 $P(E)$ 是 n 维的，设 $H_i(i=0,\cdots,n)$是 E 中 $n+1$ 个超平面，且

$$\bigcap_i H_i=\varnothing,\ 则\ \bigcap_i E_{H_i}=\varnothing,$$

从而 $P(E)=\bigcup_i(P(E)\backslash P(H_i))$ 就是所有坐标图域的并集；这样，我们就用仿射空间覆盖了 $P(E)$．这时我们说，我们有一个 $P(E)$ 的**图集**．

4.2.2 不过，要让图集真的有用，还得知道图与图之间的联系，这就是说，要计算由下图所定义的映射 $\dashrightarrow$：

$$\begin{array}{ccc} & P(E)\backslash(P(H_i)\cup P(H_j)) & \\ \swarrow & & \searrow \\ E_{H_i} & \dashrightarrow & E_{H_j}\end{array}$$

$(i\neq j)$，其中箭头 $\dashrightarrow$ 表示这个映射实际上仅定义在 E_{H_i} 的一个子集上．这个计算留在 4.2.4 中去做．

4.2.3 为了在 $P(E)$ 中进行计算，假使 $\dim E<\infty$，一个更简单的想法是取 E 的一个基 $\{e_i\}_{i=0,1,\cdots,n}$，于是，每一 $m\in P(E)$ 都可在取定的基中写为 $m=p(x)=p(x_0,\cdots,x_n)$，这里假定 $x=(x_0,x_1,\cdots,x_n)$．称 $(x_0,x_1,\cdots,x_n)$ 为 x 的（关于取定的基的）一个**齐次坐标组**．所以称为“齐次”，是因为当 x 给定时，所有这样的坐标组的集合正是 $(\lambda x_0,\lambda x_1,\cdots,\lambda x_n)$ 的集合，其中 λ 取遍 K^*．

4.2.4 我们取定 E 的一个基 $\{e_i\}_{i=0,1,\cdots,n}$，使对超平面 H_i 都有 $H_i=x_i^{-1}(0)$，并把前述两种观点结合起来进行讨论．$P(E)\backslash P(H_i)$ 的点就是齐次坐标组 $(x_0,x_1,\cdots,x_n)$ 满足 $x_i\neq0$ 的那些点；另一方面，根据 2.2.7，E_{H_i} 同构于 E 中（平行于 H_i）的仿射超平面

$x_i^{-1}(1) = H_i + e_i$，于是我们可以在 $x_i^{-1}(1)$ 中取仿射标架

$$\{e_i\} \cup \{e_i + e_j\}_{j \neq i},$$

这样，就得到一个双射 $\pi_i : P(E) \backslash P(H_i) \to K^n$ 如下：

4.2.4.1

$$\pi_i : P(E) \backslash P(H_i) \ni p(x_0, x_1, \cdots, x_n)$$

$$\longmapsto \left(\frac{x_0}{x_i}, \cdots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \cdots, \frac{x_n}{x_i}\right) \in K^n,$$

这就是 $P(E)$ 的一个坐标图的具体表达式，其中各项都在标准向量空间 K^n 中取值.

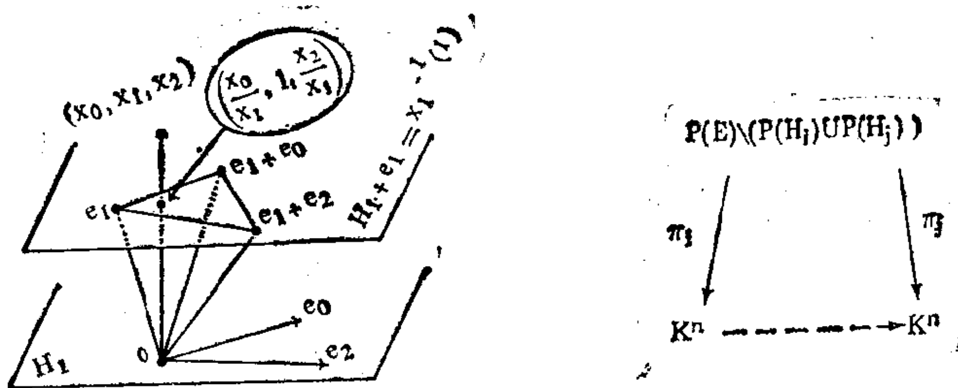


图 4.2.4.1.

现在，$\pi_j \circ \pi_i^{-1}$ 立即可以算出了；首先有

4.2.4.2

$$\pi_i^{-1} : (v_1, \cdots v_n) \longmapsto p(v_1, \cdots, v_{i-1}, 1, v_i, \cdots, v_n),$$

其次

$$p(v_1, \cdots, v_{i-1}, 1, v_i, \cdots, v_n)$$

$$= p\left(\frac{v_1}{v_{j-1}}, \cdots, \frac{v_{i-1}}{v_{j-1}}, \frac{1}{v_{j-1}}, \frac{v_{i+1}}{v_{j-1}}, \cdots, \frac{v_{j-2}}{v_{j-1}}, 1, \frac{v_j}{v_{j-1}}, \cdots, \frac{v_n}{v_{j-1}}\right),$$

因此

4.2.4.3

$$\pi_j \circ \pi_i^{-1} : (v_1, \cdots, v_n)$$

$$\longmapsto \left(\frac{v_1}{v_{j-1}}, \cdots, \frac{v_{i-1}}{v_{j-1}}, \frac{1}{v_{j-1}}, \frac{v_{i+1}}{v_{j-1}}, \cdots, \frac{v_{j-2}}{v_{j-1}}, \frac{v_j}{v_{j-1}}, \cdots, \frac{v_n}{v_{j-1}}\right),$$

其中 $\pi_j\circ\pi_i^{-1}$ 实际上只定义在 $K^n\backslash\pi_i(P(H_j))=v_{j-1}^{-1}(0)$ 上.

4.2.5 例: $E=K^2$. 这是一种重要的情形,因为 $P(K^2)=P^1(K)$ 是最简单的非平凡的射影空间，亦即K上的标准射影直线. 我们当然取 $\{e_0, e_1\}$ 为 K^2 的规范基;这时 4.2.4.2 就化为映射

$$K^*\ni v\longmapsto 1/v\in K^*.$$

首先我们可以说，$P^1(K)$ 是将K通过 $v\longmapsto 1/v$ 在K^*上映成的两叶粘合而成的；如果读者能看出这就是 $K=\mathbf{C}$ 时黎曼球面的一种定义，那就不会感到惊奇了，这种情形今后还会多次遇到: 4.3.6, 10.8, 16.3.9, 20.6. 其次,我们可以说，$P^1(K)$ 是点 $p(1, 0)$ 与K的并集，这里K已通过 $\pi_0^{-1}:v\longmapsto p(v, 1)$ 嵌入在 $P^1(K)$中; 在这种观点下，$P^1(K)$ 就显得是在K中补充上无穷远点 $p(1, 0)$ 后所得的完备化集合了. 我们在 5.2.3 中将充分地从这种观点进行讨论.

4.2.6 附注. 映射 $\pi_j\circ\pi_i^{-1}:v_{j-1}^{-1}(0)\to K^n$, 既不是线性的也不是仿射的,但它是尽可能正则的映射,它是有理分式映射. 若$K=\mathbf{R}$ 或 $\mathbf{C}$, 我们看到这些映射甚至是 C^∞ 类以上连续的(这样说是有意义的,因为 $v_{j-1}^{-1}(0)$ 是 K^n 中一个开集); 若 $K=\mathbf{C}$, 这些映射是 C^ω 类的(即复解析的). 因而我们看到,在有限维的实或复的射影空间上,可以定义拓扑的、微分几何的或复解析几何的许多概念. 或者，如果我们熟悉流形的语言，就可以说：这些射影空间都是 C^∞ 类或 C^ω 类的拓扑流形. 当 $K=\mathbf{C}$ 时，有限维复射影空间是代数几何中自然的模型. [TM]，第 190—191 页和 [DE8] 是很有趣的参考文献.

关于可定向性问题,见 4.9.4 和 [FL]，第 228 页.

关于拓扑,见下节 4.3.

4.3 射影空间的性状：拓扑与代数拓扑

本节中限于讨论有限维实或复的射影空间.

若 E 是 $\mathbf{R}$ 或 $\mathbf{C}$ 上的有限维向量空间，则它有一个规范拓扑，参见 2.7.1．由此就有：

4.3.1 定义． 射影空间 $P(E)$ 上的规范拓扑，是 $E\backslash 0$ 的拓扑在定义 $P(E)$ 的等价关系 $\mathfrak{R}$ 下的商拓扑．我们对 $P(E)$ 总赋以这个拓扑．

4.3.2 引理． 若 H 是 E 的超平面，则双射（参见 2.2.5）

$$E_H \to P(E)\backslash P(H)$$

是 E_H（参见 2.7.1.1）到赋有诱导拓扑的 $P(E)\backslash P(H)$ 上的一个同胚．

取坐标后，这个双射就是 4.2.4.2 中的 π_n^{-1}，显然连续；由商拓扑的性质可知映射

$$\pi_n : p(v_1, \cdots, v_n, 1) \longmapsto (v_1, \cdots, v_n)$$

也是连续的．

由此可知，对 $P(E)$ 来说，拓扑 4.3.1 和流形拓扑是一样的（参见 4.2.6）．

4.3.3 命题． 空间 $P(E)$ 是可分的、弧连通的，并且是紧的．

4.3.3.1 几何上，设 m, n 是 $P(E)$ 中不同的两点；则存在 E 的超平面 H，使 $m, n \in P(E)\backslash P(H)$．由于 4.3.2，我们只要注意到每个仿射空间总是可分的就可以了．下面是另一个更代数化的证明：称 $\Lambda^2 E$ 是 E 的外代数 ΛE 的 2 次向量空间，并引进映射

$$\alpha : (E\backslash 0) \times (E\backslash 0) \ni (x, y) \longmapsto x \Lambda y \in \Lambda^2 E.$$

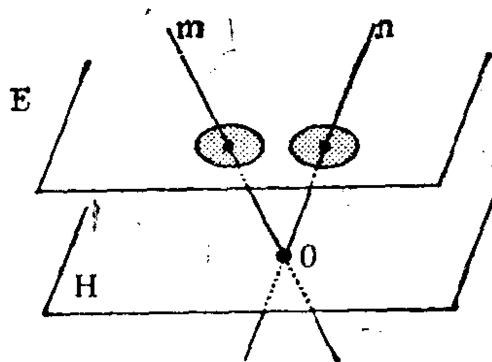


图 4.3.3.

这映射是连续的，因为它是双线性的；它的核 $\alpha^{-1}(0)$ 正好是定义 $P(E)$ 的等价关系的图. 然而 $\alpha^{-1}(0)$ 作为闭集在连续映射下的逆象，应是一个闭集，因此商集 $P(E)=(E\backslash 0)/\mathfrak{R}$ 是分离的. 如果读者不熟悉外代数，也可换一种说法：在 E 中取一个基 $\{e_i\}$，按坐标来定义 α：

$$\alpha((x_1,\cdots,x_n),(y_1,\cdots,y_n))$$
$$=(x_1y_2-x_2y_1,\cdots,x_{n-1}y_n-x_ny_{n-1})\in K^{n(n+1)/2}.$$

4.3.3.2 为了证明后两个结论，我们将 E 看作 K ($K=\mathbf{R}$ 或 $\mathbf{C}$) 上的向量空间，并赋予 E 欧氏向量空间结构；然后，设

$$S(E)=\{x\in E:\|x\|=1\}$$

是 E 中单位球面. 由于 $p(x)=p(x/\|x\|)\quad\forall x\in E\backslash 0$，有

$$p(S(E))=P(E).$$

我们知道 $S(E)$ 是紧的(参见 18.2.1)，因而 $P(E)$ 作为可分空间也一定是紧的；$\dim E\geqslant 2$ 时 $S(E)$ 是弧连通的，因此 $P(E)$ 也弧连通；上面的推论是将 $\dim E=1$ 的情形排除在外的，然而实际上 $P(E)$ 这时只含一点. 另外，我们也可以象前面证明可分性时那样来进行证明.

4.3.3.3 注. 上述证明还说明了 $P(E)$ 同胚于球面 $S(E)$ 关于等价关系 $x\mathfrak{R}y:y=\pm x$ 的商拓扑空间.

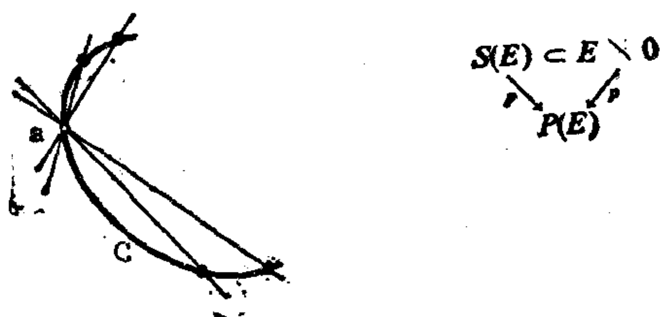


图 4.3.4.

4.3.4 应用. 既然 $P(\vec{X})$ 是与经过实仿射空间 X 中定点 a 的直线的集合等同的，从 4.3.3 我们就看到，若 C 是经过 a 的一条连续曲线，则 X 中连接 a 与 C 上不同于 a 的点的直线的集合至少含有一个极限元；把它定义成 C 在 a 处的切线，是很自然的.

4.3.5 附注. 我们可以在比 $K = \mathbf{R}$ 或 $\mathbf{C}$ 更一般的情形来定义射影空间 $P(E)$ 上的拓扑，譬如说，当 K 是一个局部紧域的情形。在这种情形，4.3.3 仍然成立.

4.3.6 命题. 空间 $P^1(\mathbf{R})$ 同胚于球面 S^1，空间 $P^1(\mathbf{C})$ 同胚于球面 S^2.

4.3.6.1 将 $\mathbf{R}^2$ 等同于 $\mathbf{C}$，设 $S^1 = S(\mathbf{R}^2) = S(\mathbf{C})$；就有

$$P^1(\mathbf{R}) = p(S^1).$$

$$\begin{array}{ccc} S^1 & \xrightarrow{c} & S^1 \\ {\scriptstyle p}\downarrow & \nearrow{\scriptstyle \underline{c}} & \\ P^1(\mathbf{R}) & & \end{array}$$

设 $c: S^1 \ni z \longmapsto z^2 \in S^1$，它将 S^1 上的复数 z 映成 z 的平方，由于 $|z| = 1$，映射后模仍为 1. 由于 $p(-z) = p(z)$，$(-z)^2 = z^2$，这就是说 c 可以推衍到商空间，从而有 $\underline{c}: P^1(\mathbf{R}) \to S^1$，它仍是连续的. 但 $\underline{c}$ 是双射而 S^1 是紧空间（参见 4.3.3），因此 $\underline{c}$ 是同胚（参见点集拓扑有关内容）.

4.3.6.2 将 $\mathbf{C}^2$ 等同于 $\mathbf{R}^4$，并赋予 $\mathbf{R}^4$ 规范欧氏结构，即

$$\|z, z'\|^2 = |z|^2 + |z'|^2 \quad \forall (z, z') \in \mathbf{C}^2 = \mathbf{R}^4.$$

我们引进球面 $S^3 = S(\mathbf{R}^4) = S(\mathbf{C}^2)$ 和球面 $S^2 = S(\mathbf{R}^3)$，这里 $\mathbf{R}^3$ 等同于 $\mathbf{C} \times \mathbf{R} = \mathbf{R}^3$. 跟 4.3.3.2 中一样：

$$p(S^3) = P^1(\mathbf{C}) = P(\mathbf{C}^2).$$

我们引进一个映射 $FH: S^3 \to S^2$，**定义为**：

4.3.6.3 $FH((z, z')) = (2z\bar{z}', |z|^2 - |z'|^2)$

（只须验证 $|2z\bar{z}'|^2 + (|z|^2 - |z'|^2)^2 = 1 \quad \forall (z, z') \in S^3$）. 然而 $m, m' \in S^3$ 使 $p(m) = p(m')$ 当且仅当有 $\lambda \in \mathbf{C}$ 使 $m' = \lambda m$（从而 $|\lambda| = 1$）时成立. 但 $|\lambda| = 1$ 时

$$FH((\lambda z, \lambda z')) = FH((z, z')),$$

因而 FH 可推衍到商空间，并定义了 $\underline{FH}: P^1(\mathbf{C}) \to S^2$，它显然连续，容易看出它是双射. 由于 $P^1(\mathbf{C})$ 是紧空间，$\underline{FH}$ 就是我们所需要的同胚.

$$\begin{array}{ccc} S^3 & \xrightarrow{FH} & S^2 \\ {\scriptstyle p}\downarrow & \nearrow_{\underline{FH}} & \\ P^1(\mathbf{C}) & & \end{array}$$

4.3.7 附注. 映射 $FH: S^3 \to S^2$ 在几何中是很基本的,称为 Hopf **纤维化**. 每点 $s \in S^2$ 的逆象 $FH^{-1}(s)$ 都同胚于圆周 S^1, 这是 4.3.6.2 的推论并且在 1.2.9 中已提到过. S^3 中的所有这些圆周,形成一个与 Clifford 平行相应的结构, 我们在 18.8 中将用很多篇幅讨论这种平行性. 另一方面, $FH: S^3 \to S^2$ 以及它的各种推广, 实质上都是代数拓扑的内容, 例如可参见 [GG], 第 151 页, [H-W], 第 387 页, [HU], 第 14 章.

4.3.8 关于 4.3.6.3 的背景的解释. 沿用 4.2.5 和 5.2.3 的记法, 记 $P^1(\mathbf{C}) = \mathbf{C} \cup \infty$, 其中 ∞ 是点 $p(1, 0)$, $\mathbf{C}$ 是 $p(x, 1)$ 的集合. 我们猜想 $\mathbf{C} \cup \infty = \mathbf{R}^2 \cup \infty$, 即 $\mathbf{C}$ 中加入无穷远点所得的一点紧化空间, 是同胚于 S^2 的. 具体证实这一结论, 要用到球极射影 (详见 18.1.4); 通常记 $S^2 \subset \mathbf{R}^3 = \mathbf{C} \times \mathbf{R}$, 射影公式为:

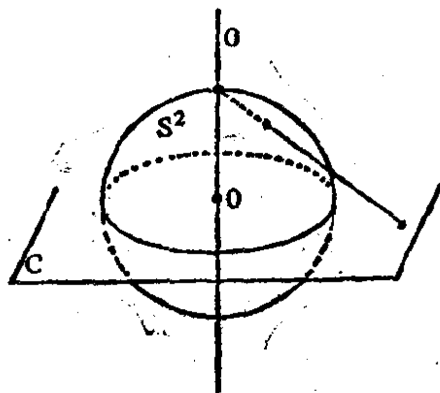


图 4.3.8.

4.3.8.1

$$\mathbf{C} \ni z \longmapsto \left(\frac{2}{|z|^2 + 1} z, \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}\right) \in S^2 \subset \mathbf{C} \times \mathbf{R}.$$

但在齐次坐标 (参见 4.2.3 和 4.2.5)中有

$$z = p\left(\frac{u}{v}, 1\right) = p(u, v),$$

于是可令 $z = u/v$; 若在上面公式中以 u/v 代 z, 同时注意到对 $(u, v) \in S^3$ 有 $|u|^2 + |v|^2 = 1$, 我们就恰好得出 4.3.6.3.

4.3.9 $n \geqslant 2$ 时 $P^n(\mathbf{R})$ 和 $P^n(\mathbf{C})$ 在拓扑上是怎样的,这是个更困难的问题, 属于代数拓扑的研究范围. 我们仅限于讨论一些特

殊的情形并给出参考文献.

4.3.9.1 我们要看的第一种情形是 $P^2(\mathbf{R})$；然而，因为 $P^2(\mathbf{R})$ 不可定向(参见 4.9.4 和 4.9.5)，我们知道(参见 [GG]，第 179 页)它不能无奇性地嵌入 $\mathbf{R}^3$ 作为子流形. 因此，不能指望在我们的视觉所能体验到的 $\mathbf{R}^3$ 中"看到" $P^2(\mathbf{R})$.

在 [H－C]，第 313 — 319 页，读者可以看到图 4.3.9.1 和 4.3.9.2 所表示的 $P^2(\mathbf{R})$ 在 $\mathbf{R}^3$ 中的带有奇性的嵌入的有关细节；图 4.3.9.2 称为 Boy 曲面.



图 4.3.9.1.

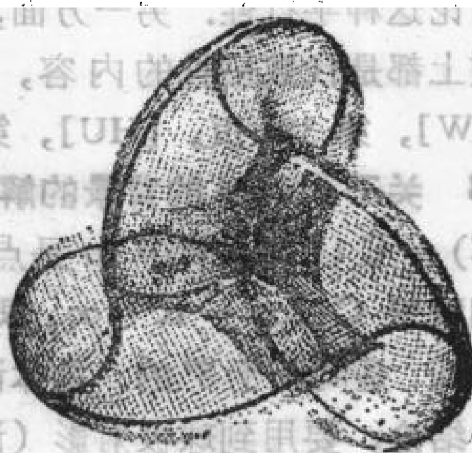


图 4.3.9.2.

Hilbert (D.) 和 Cohn-Vossen (S.)，«直观几何» Chelsea 出版社.

$P^2(\mathbf{R})$ 可以很漂亮地无奇性地嵌入 $\mathbf{R}^5$，称为 Véronèse 曲面；它是通过映射

$$\mathbf{R}^3 \ni (x, y, z) \longmapsto (x^2, y^2, z^2, \sqrt{2}\,yz, \sqrt{2}\,zx, \sqrt{2}\,xy) \in \mathbf{R}^6$$

构造起来的，这个映射在 S^2 上的限制在 $\mathbf{R}^6$ 的 (5 维) 仿射超平面 $\sum_{i=1}^{3} u_i = 1$ 中取值，并且推衍到商集，得到一个单射 $P^2(\mathbf{R}) \to \mathbf{R}^6$；因此它是到象集上的一个同胚.

有些读者也许喜欢把 $P^2(\mathbf{R})$ 看成一个 Möbius 带，这个带的同胚于圆周的边缘曲线 Γ，是等同于一点的，或者不如说，是跟一个圆盘的圆周边缘 Γ' 粘合在一起的，见图 4.3.9.3.

4.3.9.2 射影空间 $P^3(\mathbf{R})$ 同胚于 $\mathbf{R}^3$ 的旋转群 $O^+(3)$：见

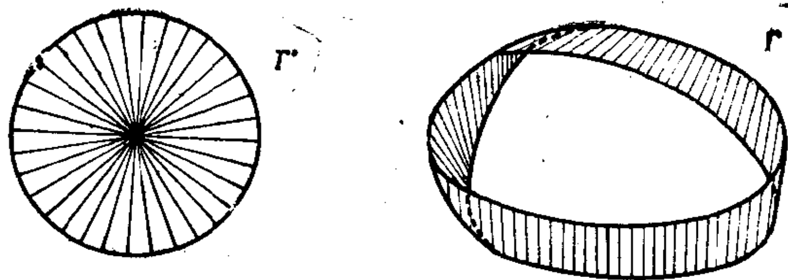


图 4.3.9.3.

8.9.3.

4.3.9.3 $P^n(\mathbf{R})$ 不是单连通的，其实它们的基本群同构于 $\mathbf{Z}_2$ $\forall n \geq 2$，因为 4.3.3.3 证明了 $p: S^n \to P^n(\mathbf{R})$ 是一个二叶覆盖；而 S^n 是单连通的，参见 18.2.2. 有时就这样把 $P^n(\mathbf{R})$ 看作 S^n 关于对径映射（即 $\mathbf{R}^{n+1}$ 中的映射 $x \longmapsto -x$ 在 S^n 上的限制）的商空间，这是很方便的；我们以后还会讨论这一点，特别是在 19.1 中. 但上面的结论已经说明了 $P^n(\mathbf{R})$ 在 $n \geq 2$ 时是不会同胚于 S^n 的.

4.3.9.4 $P^n(\mathbf{C})$ 总是单连通的. $n \geq 2$ 时 $P^n(\mathbf{C})$ 不会同胚于 S^{2n}. 得出这个结论，要用到代数拓扑中关于 $P^n(\mathbf{C})$ 和 $P^n(\mathbf{R})$ 的一些熟知的内容：胞腔剖分，Betti 数，上同调环；例如可参见 [GG]，第 90 页，[SR]，第 264—265 页.

$P^n(\mathbf{R})$ 在 $\mathbf{Z}_2$ 上的上同调环和 $P^n(\mathbf{R})$ 在 $\mathbf{Z}$ 上的上同调环的结构，都是特别简单的：这种上同调环是由一个元素生成的，这元素在 $P^n(\mathbf{R})$ 的情形是 1 阶的，在 $P^n(\mathbf{C})$ 的情形是 2 阶的.

4.4 射影标架

n 维向量空间的标架是 n 个点组成的基，n 维仿射空间的标架是 $n+1$ 个点组成的仿射标架；我们下面会看到，n 维射影空间的标架要用 $n+2$ 个点. 一个理由是：在 4.2.3 的记号下，$P(E)$ 的 $n+1$ 个点 $m_i = P(e_i)$ $(i=0, 1, \cdots, n)$ 不能确定齐次坐标，因为任何 $\lambda_i e_i(\lambda_i \in K^*)$ 会有同一投影 $m_i = p(\lambda_i e_i)$；因此没

有任何理由认为 λ_i 一定是相等的. 但添加第 $(n+2)$ 个点后,这一结论就得到保证了.

4.4.1 定义. 设 $P(E)$ 是 n 维射影空间. $P(E)$ 中 $n+2$ 个点的系统 $\{m_i\}_{i=0,1,\cdots,n+1}$ 称为 $P(E)$ 的射影标架, 如果存在 E 的一个基 $\{e_i\}_{i=1,\cdots,n+1}$ 使得 $m_i=p(e_i)\quad\forall i=1,\cdots,n+1$ 而 $m_0=p(e_1+\cdots+e_{n+1})$. 在不致引起混淆时,也简称为标架.

最后的条件表明,在取定的基所相应的齐次坐标系中, 点 m_0 的齐次坐标为 $(1,\cdots,1)$. 一个对以后的内容来说很基本的、虽然也是很初等的结论是:

4.4.2 引理. 设 m_i 是 $P(E)$ 的射影标架;则满足定义 4.4.1 要求的两个基 $\{e_i\}$, $\{e'_i\}$ 一定是成比例的,即 $\exists\lambda\in K^*$, 使

$$e'_i=\lambda e_i\quad\forall i=1,\cdots,n+1.$$

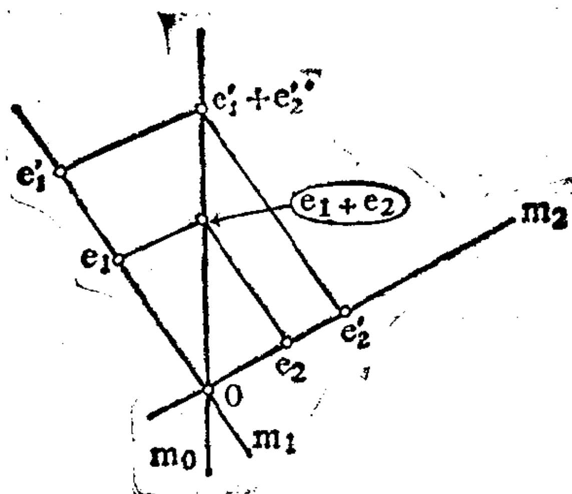


图 4.4.2.

证明可以几何地由图 4.4.2 和 Thalès 定理(参见 2.5.1)得出. 如果喜欢计算, 那么我们有 $p(e_i)=p(e'_i)\quad\forall i=1,\cdots,n+1$, 因此存在 $\lambda_i\in K$ 使

$$e'_i=\lambda_i e_i\quad\forall i=1,\cdots,n+1.$$

但 $p(e'_1+\cdots+e'_{n+1})=p(e_1+\cdots+e_{n+1})$, 因此有 $\lambda\in K$ 使 $e'_1+\cdots+e'_{n+1}=\lambda(e_1+\cdots+e_{n+1})=\lambda_1e_1+\cdots+\lambda_{n+1}e_{n+1}$, 因此,由于 $\{e_i\}$ 是基,可知 $\lambda=\lambda_i\quad\forall i=1,\cdots,n+1$.

4.4.3 因此，$P(E)$ 中取定标架后，就连带决定了齐次坐标，因为确切地说选取一个适当的基仅与位似比率有关．点 $m\in P(E)$ 的齐次坐标 $(x_1,\cdots,x_{n+1})$ 称为 m 关于所取定标架的射影坐标．

4.5 射影映射

4.5.1 设 E, E' 是两个向量空间，$f\in L(E;E')$；则应有 $f(\lambda x)=\lambda f(x)\quad \forall x\in E$，因此 f 跟定义 $P(E)$ 和 $P(E')$ 的两个等价关系是相容的．不过有一点颇伤脑筋：象集 $f(E\backslash 0)$ 一般并不含于 $E'\backslash 0$ 中，因而我们只能定义一个映射 $P(E)\backslash P(f^{-1}(0))\to P(F)$．但按习惯我们仍写成 $P(E)\to P(F)$，并讨论下面的几种映射．

4.5.2 定义． 设 $P(E)$，$P(E')$ 是两个射影空间．映射

$$g:P(E)\to P(E')$$

称为一个**态射**或**射影映射**，如果存在 $f\in L(E;E')$，使得 g 是由 f 经过向商空间的推衍得到的：$g\circ p=p\circ f$，从而实际上 g 就是一个映射

$$P(E)\backslash P(f^{-1}(0))\to P(F).$$

态射的集合记为 $M(P(E);P(E'))$；与 f 相关的 g 记为 $\underline{f}$．如果 f 是向量空间的同构，就称 $g=\underline{f}$ 是**同构**或**射影变换**；射影变换是真正的映射 $P(E)\to P(E')$；射影变换全体记为 $\mathrm{Isom}(P(E);P(E'))$．

$$\begin{array}{ccc}
E\backslash f^{-1}(0) & \xrightarrow{\ f\ } & E'\backslash 0\\
{\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p}\\
P(E)\backslash P(f^{-1}(0)) & \xrightarrow[\ \underline{f}\ ]{} & P(E')
\end{array}$$

4.5.3 问题． 首要的问题是讨论对应关系 $f\longmapsto\underline{f}$；结论是：对 $f,f'\in L(E;E')$，有

4.5.4 $\underline{f}=\underline{f'}\Longleftrightarrow\exists\lambda\in K^*:f'=\lambda f.$

首先我们注意到，给定 $g=\underline{f}$ 后，核 $f^{-1}(0)$ 就决定了．其次，若 x，y 是线性无关的，且都不在 $f^{-1}(0)$ 中，则 $f(x)$ 和 $f(y)$ 也

线性无关且 $\underline{f}(p(x))=\underline{f'}(p(x))$（对 $x+y$ 和 y 也一样）表现为存在数量 $\lambda(x)$，$\lambda(y)$，$\lambda(x+y)$ 使

$$f'(x)=\lambda(x)f(x),\ f'(y)=\lambda(y)f(y),$$
$$f'(x+y)=\lambda(x+y)f(x+y).$$

由于 $f(x)$ 和 $f(y)$ 是无关的，就推出 $\lambda(x)=\lambda(y)=\lambda(x+y)$. 当 x 和 y 越来越靠近时，我们就得到一个 λ 使 $f'=\lambda f$.

性质 4.5.4 可通过下面的双射反映出来：

4.5.5 $M^{\bullet}(P(E);P(E'))\cong P(L(E;E'))$,

其中 $M^{\bullet}(P(E);P(E'))$ 表示 $M(P(E);P(E'))$ 中除去 E 到 E' 中的零映射所相关的平凡射影映射后的集合，这个零映射是唯一在 $P(E)$ 中处处无定义的映射！

4.5.6 注. 4.5.4 中在证明充分性时实质上用到了基域的可交换性；因为，在不可交换体的情形，当 $f\in L(E;E')$ 时，映射 λf 一般不再是线性的.

4.5.7 若 $f\in L(E;E')$，$f'\in L(E';E'')$，照 4.5.1 的做法，就有

$$\underline{f'\circ f}=\underline{f'}\circ\underline{f}.$$

4.5.8 任一 K 上的 n 维射影空间同构于 $P^n(K)$. 由此，譬如说再加上连续性的条件，就说明了在 4.3 节中为什么只讨论 $P^n(\mathbf{R})$ 和 $P^n(\mathbf{C})$.

由 4.5.5 和 4.5.7 有：

4.5.9 命题. 射影变换 $P(E)\to P(E')$ 关于合成运算构成群，记为 $\mathrm{GP}(E)$ 或 $\mathrm{PGL}(E)$，称为 E 的射影群. 我们有群同构

$$\mathrm{GP}(E)\cong \mathrm{GL}(E)/K^*\mathrm{Id}_E.$$

4.5.10 命题（射影几何第一基本定理）. 设 $P(E)$，$P(E')$ 是两个维数相同的有限维射影空间，$\{m_i\}$，$\{m_i'\}$ 分别是 $P(E)$，$P(E')$ 的射影标架，则唯一地存在射影变换 $g:P(E)\to P(E')$ 使

$$m_i'=g(m_i)\quad \forall i.$$

设 $\{e_i\}$，$\{e_i'\}$ 分别是 4.4.1 中所说的跟 $\{m_i\}$，$\{m_i'\}$ 相关连的基. 定义 $f\in\mathrm{Isom}(E;E')$ 为 $e_i'=f(e_i)\quad\forall i$，则 $\underline{f}=g$ 就是所需的射影变换. 若 g，g' 都满足命题，则仿射变换

$$g'^{-1}\circ g : P(E) \to P(E)$$

在每点使标架 $\{m_i\}$ 不变，因此根据引理 4.4.2，这个射影变换可写为 $\lambda \mathrm{Id}_E$.

4.5.10.1 附注. 对不可交换体的情形，上述结论不成立：4.9.8.

4.5.11 推论. 群 $\mathrm{GP}(E)$ 是 $P(E)$ 上的可迁群，并且是 $P(E)$ 的标架集合上的单可迁群.

4.5.12 4.5.10 这么一个很容易的命题却冠以“射影几何第一基本定理”的名称，在你要从射影空间的公理出发通过冗长的演绎来证明它时，就会明白其中原因了，例如可参见 [V-Y]，第 1 卷，第 95 页.

4.5.13 射影映射的具体运算. 设 $\{e_i\}$，$\{e'_j\}$ 分别是 E, E' 的基，$f \in L(E; E')$，$M(f) = (a_{ij})$ 是 f 关于这两个基的矩阵. 对于 $P(E)$ 和 $P(E')$ 中跟这两个基相关连的齐次坐标（参见 4.2.3），有

$$f((x_1, \cdots, x_{n+1})) = \left(\sum_i a_{1i}x_i, \cdots, \sum_i a_{n+1i}x_i\right).$$

我们对 $P(E)$ 和 $P(E')$ 采用跟取定的基相应的坐标图，并在运算中不计等式两端相差一个数量的差别. 例如，可采用坐标图 π_{n+1}, π_{m+1} ($n = \dim(P(E))$, $m = \dim(P(E'))$)；由 4.2.4.1 和 4.2.4.2 可推出 $\pi_{m+1}\circ f\circ \pi_{n+1}^{-1}$ 为：

$$(v_1, \cdots, v_n) \longmapsto \left(\frac{\sum_i a_{1i}v_i + a_{1,n+1}}{\sum_i a_{p+1,i}v_i + a_{p+1,n+1}}, \cdots, \frac{\sum_i a_{pi}v_i + a_{p,n+1}}{\sum_i a_{p+1,i}v_i + a_{p+1,n+1}}\right),$$

当然，它只定义在 $\sum_i a_{p+1,i}v_i + a_{p+1,n+1} \neq 0$ 处.

4.5.14 特殊情形 $n = m = 1$. 取 K^2 的规范基（参见 4.2.5），考虑 $f \in \mathrm{GP}(K^2)$，即 $f \in \mathrm{GL}(K^2)$ 的情形；设

$$M(f)=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

我们看出 $\pi_2\circ f\circ\pi_2^{-1}$ 就是

$$v\longmapsto\frac{av+b}{cv+d}\quad\left(v\neq-\frac{d}{c}\right),$$

在 $P^{-1}(K)$ 上就有:

$$(v,1)\longmapsto\left(\frac{av+b}{cv+d},1\right)\quad\left(v\neq-\frac{d}{c}\text{ 时}\right).$$

对 $P^1(K)$ 的两个坐标图 π_1,π_2 的所有可能的组合都相仿地进行考察,就得到下面的结论:

4.5.15

$$c\neq 0\begin{cases}(v,1)\longmapsto\left(\dfrac{av+b}{cv+d},1\right) & \text{当 } v\neq-\dfrac{d}{c}\text{ 时}\\[2ex] \left(-\dfrac{d}{c},1\right)\longmapsto(1,0) & \\[2ex] (1,0)\longmapsto\left(\dfrac{a}{c},1\right) & \end{cases}$$

$$c=0\begin{cases}(v,1)\longmapsto\left(\dfrac{av+b}{d},1\right)\\[2ex] (1,0)\longmapsto(1,0).\end{cases}$$

我们注意到, $K=\mathbf{R}$ 或 $\mathbf{C}$ 时:

$$\frac{a}{c}=\lim_{v\to\infty}\frac{av+b}{cv+d},\quad\lim_{v\to-d/c}\frac{av+b}{cv+d}=\infty,$$

这样就证实了 4.2.5 末尾的结论,即 $p(0,1)$ 的作用相当于 ∞. 在 5.2.5 中我们还将详细地讨论这个问题.

4.5.16 射影变换的构造. 仍假定 $P(E)$ 是有限维的. 鉴于 4.5.4, 我们在"不计数量差别"的前提下来讨论 $f\in GL(E)$ 的构造. 至少在 K 是代数闭域的情形下, 我们可以通过 Jordan 分解得出 $GL(E)$ 中元素的几何构造; 然后就不难转到 $P(E)$ 上去. 对这一问题, 我们不作详细讨论; 有兴趣的读者可以在 [FL] 的附录 1 中看到用现代语言作的阐述, 如果把它跟不明显用到线性代数

的古典论述(例如 [V-Y]，第 I 卷)对照起来看，是很有意思的.

我们仅仅在第 6 章中对 1 维的情形作详细的讨论；此外我们给出下面的几个结果.

4.5.17 命题. 设 $g=\underline{f}\in \mathrm{GP}(E)$，$m\in P(E)$，则 m 是 g 的不动点(即 $m=g(m)$) 的充要条件是 $p^{-1}(m)$ 是 f 的特征直线.

这个命题的意义在于：为了在 $P(E)$ 中讨论 $\underline{f}$，首先要在 E 中考虑的是 f 的特征子空间，而不是它们的特征值(但这些特征值本身也是很有意思的，参见 6.6.3).

4.5.18 推论. 若 $K=\mathbf{C}$，则每个射影变换至少有一个不动点. 当 $K=\mathbf{R}$ 且 $\dim(P(E))$ 是偶数时，结论仍成立.

例如，当 $f\in \mathrm{GL}(E)$ 的特征值都不相同时，f 恰有 $n+1$ 个不同的不动点 ($n=\dim(P(E))$)，老的书上称它们为“重点”；这是由 4.4.2 直接可知的.

4.5.19 $\mathrm{GP}(E)$ 的对合. 若 $f\in \mathrm{GL}(E)$ 是对合的，即

$$f^2=f\circ f=\mathrm{Id}_E,$$

则 $\underline{f}$ 也是对合的；在 6.4.6 中我们还会看到在这种情形下 f 的一个绝妙的几何结构. 若 $g\in \mathrm{GP}(E)$ 是对合的，$g^2=\mathrm{Id}_{P(E)}$，我们注意到，g 不一定在前述意义下对合，例如，当

$$E=\mathbf{R}^2,\ M(f)=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix} \text{ 时，我们有 } \underline{f}^2=\mathrm{Id}_{P^1(\mathbf{R})},$$

而 $f^2=-\mathrm{Id}_{\mathbf{R}^2}$. 确切地说，若 $\underline{f}^2=\mathrm{Id}_{P(E)}$，则必有 $f^2=\lambda\mathrm{Id}_E$，这里 $\lambda\in K^*$；若 K 是代数闭域，则可写 $\lambda=\mu^2$，从而 $g=\underline{f}=\underline{\mu^{-1}f}$，这里 $(\mu^{-1}f)^2=\mathrm{Id}_E$.

4.5.20 $\mathrm{GP}(E)$ 的拓扑. 若 $K=\mathbf{R}$ 或 $\mathbf{C}$，E 是有限维的，则射影群 $\mathrm{GP}(E)$ 容有一个规范拓扑，即 $\mathrm{GP}(E)=\mathrm{GL}(E)/K^*\mathrm{Id}_E$ 的商拓扑(参见 2.7.1). $\mathrm{GP}(E)$的连通性与 $P(E)$ 的可定向性有关；对此，可见 4.9.4 和 4.9.5，或 [FL]，第 228—230 页.

4.5.21 相互关系. 由同构 $P(E)\to P(E^*)$ 可导出很多几何结果；在 14.5，14.8.12 中我们会很自然地碰到它们；也可参见 [FL]，第 260 页以后.

4.6 子 空 间

注意到若 $F \subset E$ 是一个向量子空间，$F \neq \{0\}$，则F关于4.1.1 的等价关系 $\mathfrak{R}$ 是稳定的，因而就可以把 $P(F)$ 等同于

$$p(F) \subset P(E);$$

特别是，内射 $i: F \to E$ 导出 $\underset{\sim}{i} \in M(P(F); P(E))$，$\underset{\sim}{i}: P(F) \to P(E)$ 是自然内射．

4.6.1 定义． 射影空间 $P(E)$ 的子集V称为子空间，或射影子空间，如果存在E的一个向量子空间 F，使 $P(F) = V$．我们赋予 $P(F)$ 自然的射影空间结构．$\dim V = \dim F - 1$ 称为子空间 V 的维数．

4.6.1.1 于是我们看到，在 $P(E)$ 的射影子空间的全体与E的向量子空间全体之间，有一个双射．

4.6.2 -1 维子空间是空集．0 维子空间是 $P(E)$ 的点；1 维(相应地，2 维)子空间称为 $P(E)$ 的直线(相应地，平面)．由E的向量超平面得出的$P(E)$的射影子空间也称为 $P(E)$ 的(射影)超平面；超平面全体记为 $\mathscr{H}(P(E))$，于是有双射(参见 4.1.3.5)：

4.6.3 $\mathscr{H}(P(E)) \cong \mathscr{H}(E) \cong P(E^*)$.

4.6.4 设 $\{V_i\}_{i\in I}$ 是射影空间的任意一族子空间，则 $\bigcap_{i\in I} V_i$ 仍是一个子空间．由此推出(跟 2.4.2.5 中一样)：

4.6.5 命题． 设S是一个射影空间的任一子集；包含S的最小子空间称为由S生成的子空间，记为 $\langle S \rangle$；它等于所有包含S的子空间的交．

4.6.6 定义． 一个射影空间中的点 $m_i (i = 1, \cdots, k+1)$ 称为无关的或射影无关的，如果

$$\dim(\langle m_1, \cdots, m_{k+1} \rangle) = k.$$

4.6.7 例． 一点总是无关的；两点无关的充要条件是它们不相同，这时它们定义了唯一的一条直线．三个点 a, b, c 无关的充要条

件是它们各不同，而且每点不在经过另两点的直线上：

$$a \notin \langle b, c\rangle,\ b \notin \langle c, a\rangle,\ c \notin \langle a, b\rangle;$$

这时它们定义了唯一的一个平面 $\langle a, b, c\rangle$. 这样，我们看到，经过不同的两点有且仅有一条直线，对三点也有类似的结论；这些都是建立射影空间公理体系时开宗明义的公理. 参见 [V-Y]，第 I 卷，第 95 页.

4.6.8 命题. 点 $m_i(i = 1, \cdots, k + 1)$ 无关的充要条件是

$$m_i \notin \langle m_1, \cdots, \hat{m}_i, \cdots, m_{k+1}\rangle \quad \forall i = 1, \cdots, k + 1,$$

其中$\hat{}$表示抽去小帽下的这个元素. 若空间是 n 维的，则

$$\{m_i\}_{i=0,1,\cdots,n+1}$$

是标架的充要条件是 $n + 1$ 个点 $\{m_j\}_{j\neq i}$ 是无关的 $\forall i=0, 1, \cdots, n + 1$.

第一个结论只不过是把线性代数中一个熟知的性质用射影几何的语言来说罢了. 为证第二个结论，我们取 $e_i \in E$ 使

$$p(e_i) = m_i \ (i = 0, 1, \cdots, n + 1);$$

由于 $\{m_i\}_{i=1,\cdots,n+1}$ 是无关的，$\{e_i\}_{i=1,\cdots,n+1}$ 就是 E 的一个基. 令 $e_0 = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i e_i$；由 $\lambda_i \neq 0(i = 1, \cdots, n + 1)$即可推出$\{m_j\}_{j\neq i}$ $(i = 1, \cdots, n + 1)$ 是无关的，因此 $\{\lambda_i e_i\}_{i=1,\cdots,n+1}$ 是 E 的一个基，这个基满足 4.4.1.

4.6.9 推论. 设 D, D' 是两条射影直线，$\{a, b, c\}$ 是D上不同的三点，$\{a', b', c'\}$ 是 D' 上不同的三点，则有且仅有一个射影变换 $f: D \to D'$ 使得

$$f(a) = a',\ f(b) = b',\ f(c) = c'.$$

事实上，4.6.7 和 4.6.8 说明了 $\{a, b, c\}$ 是D的射影标架，而 $\{a', b', c'\}$ 是 D' 的射影标架；因此用 4.5.10 即得结论.

4.6.10 射影几何的公理体系还包括关于子空间的交的公理；现在我们可从 4.6.1.1 和经典的线性代数关系式

$$\dim(F + G) + \dim(F \cap G) = \dim F + \dim G$$

得出：

4.6.11 命题. 设 V, W 是同一个射影空间的两个子空间；则有

$$\dim(\langle V \cup W \rangle) + \dim(V \cap W) = \dim V + \dim W.$$

4.6.12 推论.

(i) 若 $\dim V + \dim W \geqslant \dim(P(E))$, 则 $V \cap W \neq \varnothing$;

(ii) 若 $\dim(P(E)) = n$, 则 $P(E)$的 n 个超平面至少有一个公共点；

(iii) 设H是一个超平面，一点 $m \notin H$; 则经过m的每条直线 D与H交于且仅交于一点；

(iv) 一个射影平面上两条不同的直线交于且仅交于一点.

4.6.13 这些推导显示了射影几何比仿射几何优越之处：射影子空间无例外地具有相交性质，而不存在平行的情况（参见 2.4.9).

在第 19 章中我们会碰到一种几何，其中有几种平行，见 19.3.2.

4.6.14 子空间方程. 子空间上的计算问题已由 2.4.8.1 和 4.6.1.1 所解决.

4.6.15 子空间与拓扑. 这节中 $K = \mathbf{R}$ 或 $\mathbf{C}$, 并考虑有限维的射影空间；我们赋予这些空间 4.3.1 中所说的拓扑. 一个向量子空间 $F \subset E$, $F \neq E$, 的补空间 $E \backslash F$ 是在E中处处稠密的，由此可推出在 $P(E)$ 中，一个子空间 $P(F)$ 的补空间 $P(E) \backslash P(F)$ 是在 $P(E)$ 中处处稠密的；这也就说明了 4.5.14. 这一性质类似于 2.7.1.2；而且，任一子空间都是 $P(E)$ 的闭子集. 相反地，2.7.3.2 却不成立了：对 $P(E)$ 的任一超平面 $P(H)$, 空间 $P(E) \backslash P(H)$ 总是弧连通的；要看出这一点，只要注意到（参见 4.3.3.1) $P(E) \backslash P(H)$同胚于一个仿射空间，或者直接作出连接 $P(E) \backslash P(H)$ 中两点的弧：图 4.6.15.

4.6.16 有限域的情形. 若 $P(E)$ 是在具有 k 个元素的有限域上的有限维射影空间，它的直线和子空间形成各种有趣的结构. 例如，在每条直线上有相同个数的点，经过每点有相同条数的直线；若 $k = 2$ $(K = \mathbf{Z}_2)$ 而 $P(E)$ 是一个平面，图 4.6.16 中的七

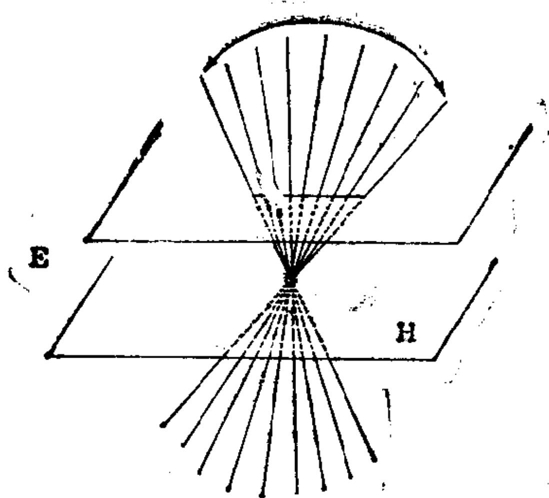


图 4.6.15.

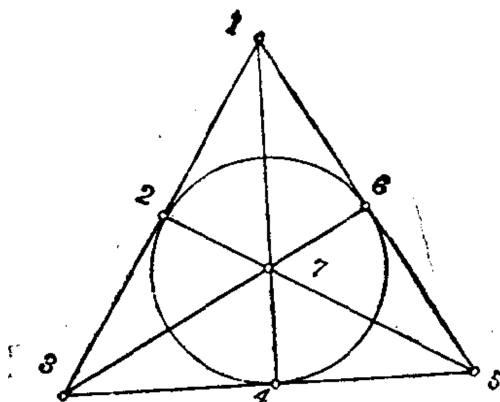


图 4.6.16.

个点就表示了这个情况，$P(E)$ 中的七条直线就是图中画出的六条直线和那个圆周. 关于射影几何结构问题的详细讨论，可参见 [H-C]，第 94—143 页，书中附有插图，论述也是初等的. 另外，[DI] 一书是较新的文献. 也可参见 4.9.11.

4.7 透视，航空摄影

4.7.1 设 H, H' 是一个射影空间 $P(E)$ 的两个超平面，m 是 $P(E)$ 中既不属于 H 也不属于 H' 的一点；根据 4.6.7 和 4.6.12，若 $x \in H$，则存在唯一的直线 $\langle m, x\rangle$，它与 H' 总有唯一的交点

$$g(x) = H' \cap (\langle m, x\rangle),$$

这样就有了一个映射 $g: H \to H'$.

4.7.2 命题. 我们有 $g \in \mathrm{Isom}(H; H')$.

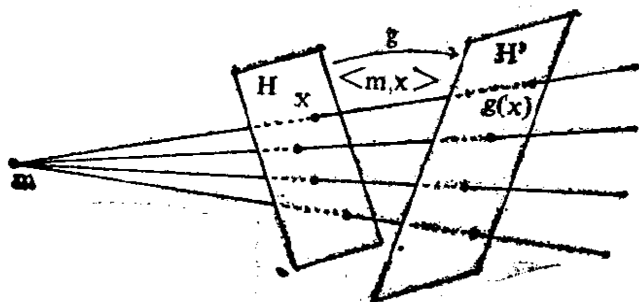


图 4.7.2.1.

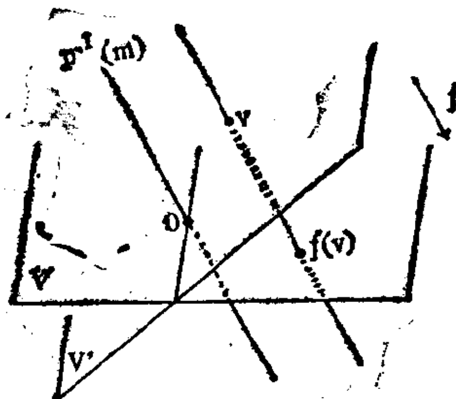


图 4.7.2.2.

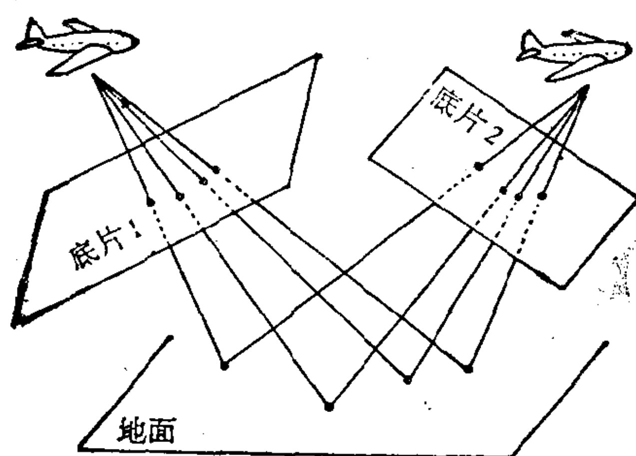


图 4.7.3.1.

设 V, V' 是 E 的超平面且使 $H=p(V)$, $H'=p(V')$;我们要找 $f\in L(V;V')$, 使 $\underline{f}=g$ (参见 4.5.2), 然而 V' 上的线性射影是平行于向量直线 $p^{-1}(m)$ 的(亦即有直和 $E=p^{-1}(m)\oplus V'$), 限制在 V 上就是我们所考虑的映射了.

4.7.3 我们可以称 g 是以 m 为中心的从 H 到 H' 上的透视. 若限制在 H 和 H' 的局部范围来看,这情形是跟我们把两个平面置于我们的视野中的情形相应的,也是跟拍摄一片平地的情形相应的, H 是要拍摄的平面部分, H' 就是底片. 如果我们要用航空摄影来制作一块假定是平坦的地面的地图,尤其是当每张底片都太小,不能摄进整块地面,而必须把它们拼接起来的时候,就应该知道怎样来调整底片,这是应用透视的室内作业;而且还应该知道怎样把公共

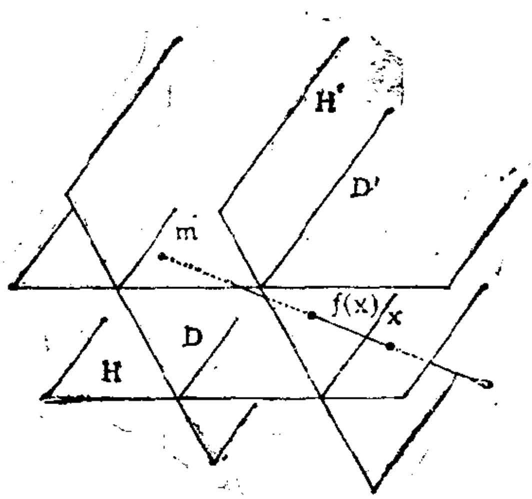


图 4.7.3.2.

部分完整地重迭起来．而两张底片上反映所摄地面同一区域的两部分之间的对应，是一个由两种摄影透视所合成的射影变换．命题 4.5.10 证明只要能把四点迭合起来，底片的迭合就大功告成了。

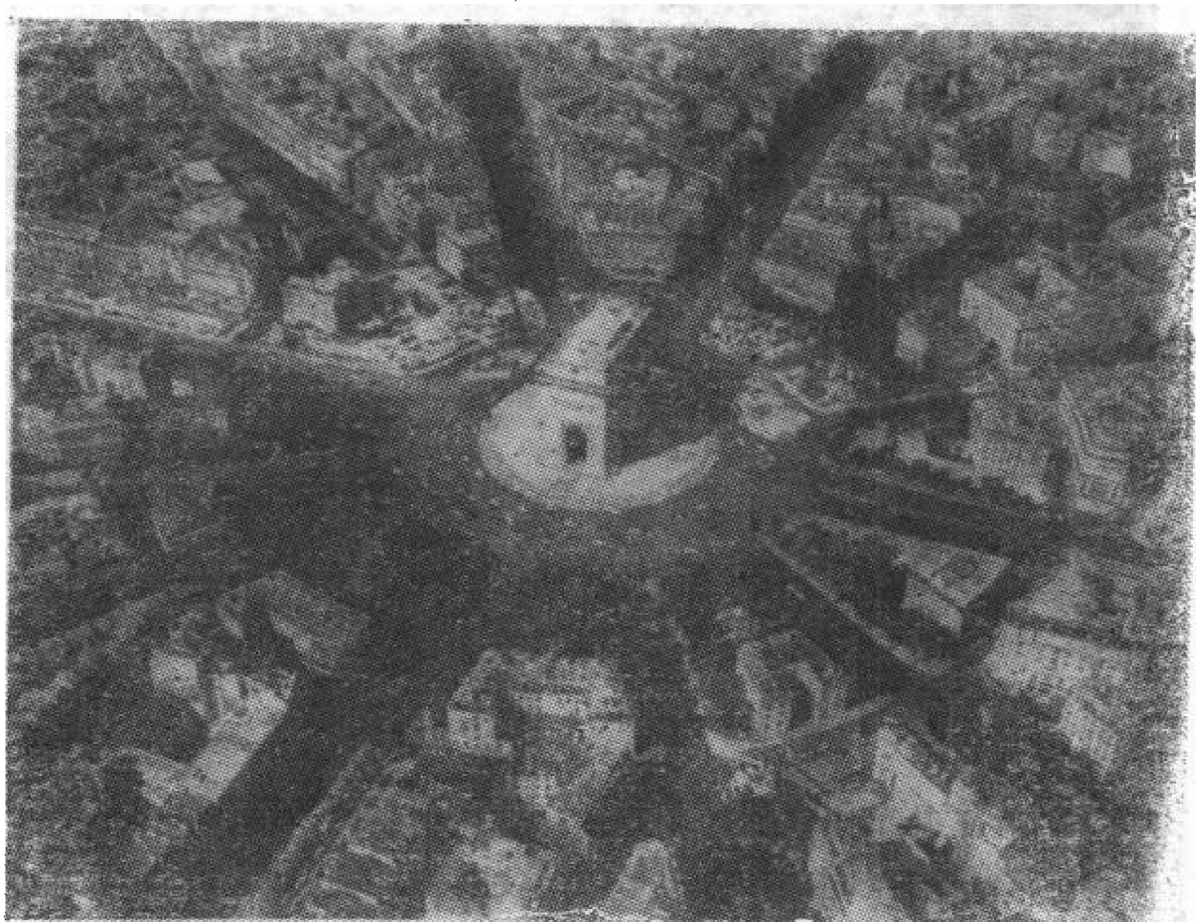


图 4.7.3.3.

4.7.4 作为实用的练习，读者可以在 4.7.3.3 和 4.7.3.4 两张照片上各找四点，并在一张纸上画出它们迭合而得的格局，验证它们并非通过仿射变换得到的．

4.7.5 航空摄影与地图绘制． 现在要提醒读者注意：当我们要通过航空摄像的拼接来制作一幅地图时，靠四点的重迭是不能实现拼接的，我们在 4.7.3.3 和 4.7.3.4 所看到的情况就说明了这一点．其实，即使在理想的条件下，地球表面也并非平面，而是球面，或者更确切地说，是椭球面，参见 18.1.5.3．现在，拼接的办法在理论上是完善的，也就是说是在三维空间中进行的；拼接用的工具是价格昂贵的立体比较仪，参见［BV］；关于地图绘制，我们将在 18.1.5



图 4.7.3.4.

到 18.1.8 这几节中花相当大的篇幅进行讨论.

4.7.6 在仿射空间中，仍然可以定义透视，但只限于定义在以 m 为中心构成透视的两个超平面 H 和 H' 的部分区域；事实上，$g:H \to H'$ 只能定义在 $H\backslash D$ 上，其中 D 是 H 和平行于 H' 且过 m 点的超平面的交集. 而 $g:H\backslash D \to H'$ 则是 $H\backslash D$ 到 $H'\backslash D'$ 的一个双射，其中 D' 是 H' 和平行于 H 且过 m 点的超平面的交集. 这种仿射透视常被用来引进射影几何的概念，特别是一个仿射空间的射影完备化的概念，后者是下一章的讨论对象. 也可参见第 174 和 175 页.

4.8 非交换的情形

4.8.1 对非交换的体的情形，我们也可以定义射影空间、射影变换

和子空间；前面有几个地方(4.5.6，4.5.10.1)我们已经提到过非交换性带来的影响．读者可以仔细看一下本章中哪儿是确实用到交换性的，并举出反例来，这是一个很好的讨论题目．

4.8.2 例如，对四元数体 $\mathbf{H}$ (参见8.9)，我们可以对任一整数 n 来定义标准四元数射影空间

$$P^n(\mathbf{H}) = P(\mathbf{H}^{n+1});$$

它在它的自然拓扑下是可分的、紧的．射影直线 $P^1(\mathbf{H})$ 同胚于球面 S^4 (参见 4.9.7)．$P^n(\mathbf{H})$的代数拓扑结构也是完全清楚的；例如可参见 [SR]，第 265 页；有一篇很有趣的文章，即 [E-K]．

4.8.3 甚至可以在比体更一般的结构上来定义射影空间；一个重要的例子是 Cayley 八元数空间 $\mathbf{Ca}$，即定义有非结合的乘法的八维实向量空间． 在 $\mathbf{Ca}$ 上可以构造同胚于球面 S^8 的射影直线 $P^1(\mathbf{Ca})$ 以及一个射影平面 $P^2(\mathbf{Ca})$，即 Cayley 八元数射影平面；关于这些构造和这个射影平面的性质，可见 [PO]，第 XIV 章，[BOR2]，第 199 页，[E-K]，第 12 页，尤其是 [BES] 的第 3 章．

在 $\mathbf{Ca}$ 上之所以不能定义维数 $\geqslant 3$ 的射影空间，是因为这样的一个(满足子空间交集标准公理的)射影空间自然而然地会满足 Desargues 定理(见 5.4.3 和 5.4.4)，而这一定理是用到基域的结合性的；参见 [PT]，第 3 章或 [HA]，第 374 页(此书最后一章关于射影平面的内容很精采)．

4.9 练　　习

4.9.1 设 $P(E)$ 是有限维的实或复的射影空间；证明对任一超平面H来说，双射 $P(E)\backslash P(H) \to E_H$ (参见 4.2.1)是一个同胚．

4.9.2 证明 4.3.9.1 的最后一段．

4.9.3 证明 $P^n(\mathbf{R})$ 同胚于 $\mathbf{R}^n$ 中闭球 $B(0, 1)$ 关于等价关系 $\mathfrak{R}$ 所作的商集，其中 $\mathfrak{R}$ 定义为：对 $x \neq y$，当且仅当

$$x \in S(0, 1) = S^{n-1} \text{ 和 } y = -x$$

时 $x\mathfrak{R}y$，该商集取商拓扑结构．特别讨论 $n=1$ 和 $n=2$ 的情形(参见 4.3.6 和 4.3.9.1)．

4.9.4 对一个有限维 n 的实射影空间，讨论映射 4.2.4.3 的 Jacobi 矩阵的符号，从而推出：n 为奇数时，$P^n(\mathbf{R})$ 是可定向微分流形，n 为偶数时 $P^n(\mathbf{R})$ 不可定向．

4.9.5 讨论射影群 $GP(P^n(\mathbf{R}))$ 的连通性，并从而讨论 $P^n(\mathbf{R})$ 何时可定向．

4.9.6 讨论子空间在射影映射下的象和逆象．

4.9.7 证明 $P^1(\mathbf{H})$ 同胚于球面 S^4，其中 $\mathbf{H}$ 是四元数体(参见4.8.2)．

4.9.8 准确地分析并说明在4.5.10 的证明中，“基域是交换的”这一假设条件用在哪里．举出一个非交换体情形下的反例；我们还可以在 $P^n(\mathbf{H})$ (参见 4.8.2)中找出一个无限点集，其中任何 $n+1$ 个元素都是无关的，并有一个异于恒等映射的射影变换使这些点不动．

4.9.9 在普通空间里画出 $P^3(\mathbf{Z}_2)$ 中的点、直线和平面的示意图．

4.9.10 设 $\{H_i\}$ 是一个有限维 n 的射影空间 $P(E)$ 的一族超平面；讨论 $P(E)$ 中 $\dim(\bigcap_i H_i)$ 与 $P(E^*)$ 中 $\dim\left(\left\langle \bigcup_i H_i\right\rangle\right)$ 的关系．

4.9.11 设 K 是一个 k 个元素的体，$P(E)$ 是 K 上 n 维射影空间．证明 $P(E)$ 中 p 维子空间的集合的基数是

$$\frac{(k^{n+1}-1)(k^{n+1}-k)\cdots(k^{n+1}-k^p)}{(k^{p+1}-1)(k^{p+1}-k)\cdots(k^{p+1}-k^p)}.$$

证明射影群 $GP(E)$ 的阶是

$$(k^{n+1}-1)(k^{n+1}-k)\cdots(k^{n+1}-k^{n-1})k^n.$$

4.9.12 Möbius 四面体． 在三维射影空间中作出两个四面体 $\{a,b,c,d\}$ 和 $\{a',b',c',d'\}$，使得第一个四面体的每个顶点落在第二个四面体的一个面上，同时第二个四面体的每个顶点又落在第一个四面体的一个面上，亦即：

$$a\in\langle b',c',d'\rangle,\cdots,a'\in\langle b,c,d\rangle,\cdots,$$

关于这种构造的解释以及它的推广，可见 14.5.5 和 14.8.12. 关于一类由铰接杆系作出的 Möbius 四面体（其上的点描出挠率为常数的曲线）的讨论. 可见 [BA].

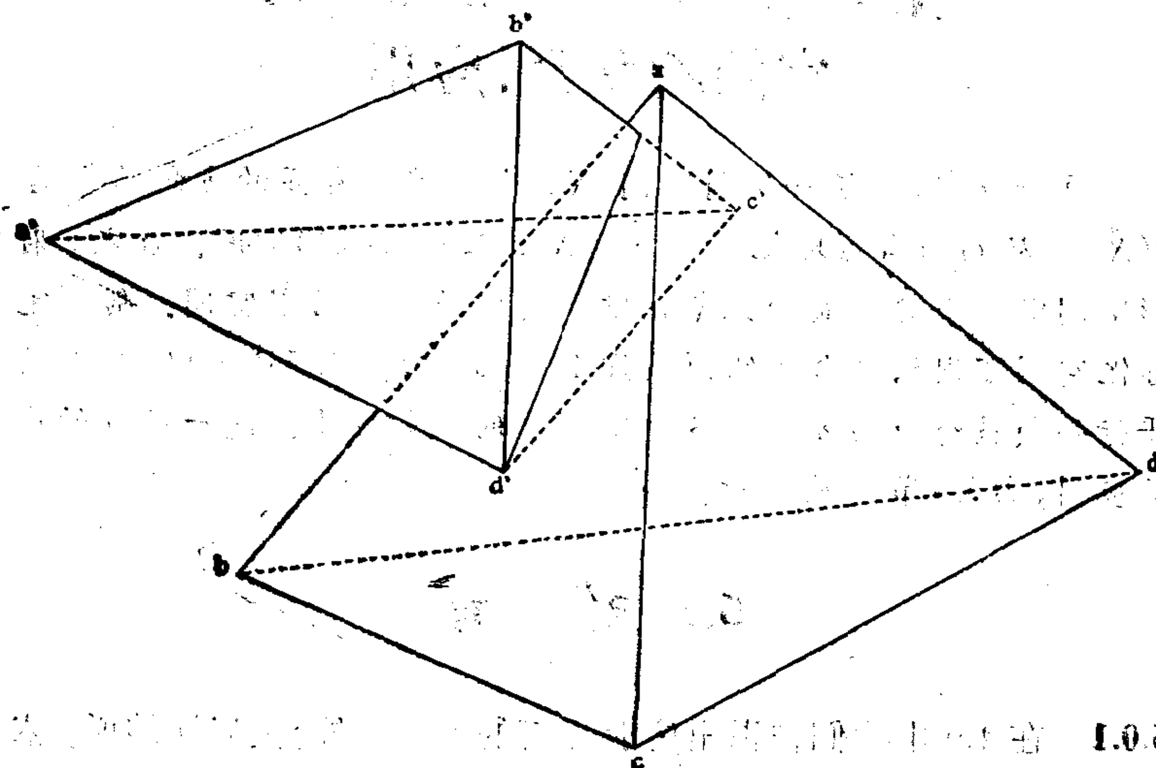


图 4.9.12.

第5章 仿射空间和射影空间的联系.应用

这一章中,对任一仿射空间 X, 作出其中直线的方向的集合 $P(\vec{X})$, 从而很自然地把仿射空间X嵌入一个射影空间. 反之,射影空间中一个超平面的完备化空间自然是一个仿射空间. 射影完备化空间可用相当自然的方式作出 (5.0 节). 在 5.3 节中,X中的平行性质被对应为X的完备化空间中的相交性质. 这一对应的广泛应用,由5.4 节可见一斑.

5.0 引 言

5.0.1 在 4.0 中我们曾指出仿射几何的不足之处;更确切地说,依照 Desargues 的做法,我们想把一个仿射空间X扩充成一个射影空间 $\tilde{X}$, 它是X和X的无穷远点,即 X 的(直线的)方向的集合 ∞_X 的并集,其中后一集合也就是 $P(\vec{X})$; 也就是说,

$$\tilde{X} = X \cup \infty_X = X \cup P(\vec{X}).$$

这样,只要作出不相交并集 $X \cup P(\vec{X})$, 上面所说的扩充在集合论意义下就总是能做到的;困难在于使 $\tilde{X}$ 成为一个射影空间.有一条途径是建立公理化体系;但我们对此不作阐述,以使本书保持不涉及系统的公理化观点的初衷(参见 4.1.2 和 [AN], [HA], [DI], [H-P], [PT]). 下面来叙述给出所需结构的三种代数方法.

5.0.2 最直接的做法是假设X是有限 n 维仿射空间,而

$$\{x_i\}_{i=0,1,\cdots,n}$$

是X的一个仿射标架. 我们所要找的射影空间就是

$$P^n(K) = P(K^{n+1}),$$

嵌入 $X \to P^n(K)$ 由

5.0.2.1 $x = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \longmapsto p(\lambda_1, \cdots, \lambda_n, 1)$

给出(参见 2.2.9 和 4.2)；可以看出，X 在 $P^n(K)$ 中的象集的余集就是超平面 $P^{n-1}(K) = P(K^n \cong K^n \times \{0\})$，由于 5.0.2.1 式，这个余集与 $P(\vec{X})$ 等同.

5.0.3 稍细巧一些的做法是在 5.0.2 的基础上提出的：作 X 在 $a \in X$ 处的向量化空间，考察射影空间 $P(X_a \times K)$，其中 $X_a \times K$ 是两个向量空间 X_a 和 K 的直积；将 X 等同于 $X_a \times K$ 的子集 $X_a \times \{1\}$，并利用相应的坐标图(参见 4.2)即

5.0.3.1 $x \longmapsto p(x, 1)$,

我们就把 X 嵌入了 $P(X_a \times K)$. X 在 $P(X_a \times K)$ 中的象集的余集是 $P(X_a) \cong P(\vec{X})$.

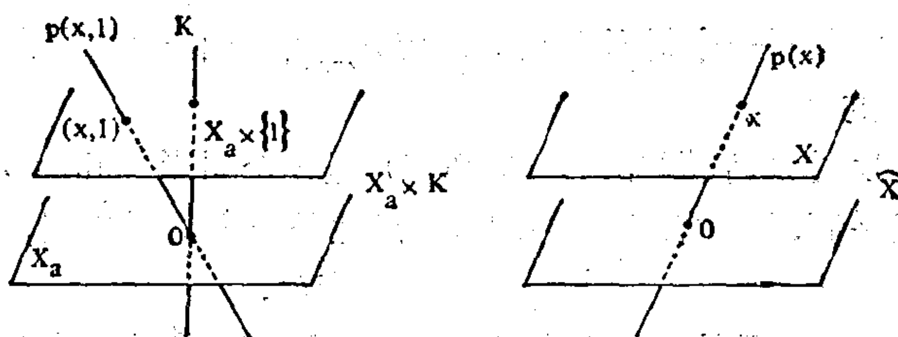


图 5.0.3.

5.0.4 最后一种做法要用到 X 所对应的泛向量空间 $\hat{X}$；只要取 $\tilde{X} = P(\hat{X})$，X 由

5.0.4.1 $x \longmapsto p(x)$

嵌入了 $P(\hat{X})$，其中 X 已被看作嵌入在 $\hat{X}$ 中的仿射超平面（参见 3.1.6）.

5.0.5 前两种做法的缺点是它们不是内在的：如果照 5.0.2 那样做，我们事先就不知道所得到的射影空间是否自然地跟 X 联系在一起(简言之，可以不很精确地说成它"只依赖于" X). 5.0.3 的情形也一样，其实在这种情形我们已经看到所有的 $P(X_a)$ 都是 $P(\vec{X})$，因为 a 的选取只会影响到 X 的一个平移，而平移是不改变方向的(参见 2.3.3.4). 不过，5.0.2 和 5.0.3（尤其是 5.0.2）也有两个优

点：一是它们明显地提供了进行运算的基础．二是它们比较初等；特别是我们可以很快地由它们引出复化的问题来，这些问题我们留待第 7 章讨论．

5.1 仿射空间的射影完备化

5.1.1 设 X 是一个仿射空间，$\hat{X}$ 是它的泛向量空间（参见 3.1）：

$$\hat{X} = \vec{X} \cup (K^* \times X).$$

作射影空间 $\tilde{X} = P(\hat{X})$．注意到 X 是通过 $x \longmapsto (x, 1)$ 嵌入 $\hat{X}$ 的，而且规范射影 $p: \hat{X} \to \tilde{X} = P(\hat{X})$ 在 X 上的限制是单射，就可以把 X 等同于 $\tilde{X}$ 的一个子集．于是 $\tilde{X}$ 分成两部分：$\tilde{X} = X \cup P(\vec{X})$．令 $P(\vec{X}) = \infty_X$，就有 $\tilde{X} = X \cup \infty_X$．这样，我们就把仿射空间 X 嵌入了一个射影空间 $\tilde{X}$，使得 X 是一个超平面（即 $\infty_X = P(\vec{X})$）的余集．

5.1.2 反过来，我们知道，若 $P(E)$ 是一个射影空间而 $P(H)$ 是任一超平面，则余集 $P(E) \backslash P(H)$ 自然是一个仿射空间，即

$$E_H = P(E) \backslash P(H),$$

参见 2.2.6．另外，2.2.7 和 3.1.6 说明了 X 到 $\tilde{X}$ 的对应和 $P(E) \backslash P(H)$ 到 E_H 的对应互为逆对应．

可以将第 2 章和第 3 章中的结论概括为：

5.1.3 定理． (i) 设 X 是仿射空间，$\tilde{X} = P(\hat{X})$；这个 X 通过 $x \longmapsto p(x, 1)$ 等同于 $\tilde{X}$ 的一个子集，仍记为 X；这个子集 X 是 $P(\vec{X}) = \infty_X$ 在 $\tilde{X}$ 中的余集．$\tilde{X}$ 称为 X 的**射影完备化空间**或**完备化空间**，$\infty_X = P(\vec{X})$ 称为 X 的**无穷远处的超平面**．若 X, X' 是两个仿射空间，$\tilde{X}, \tilde{X}'$ 是它们的完备化空间，$f \in A(X; X')$ 是仿射映射，则唯一地存在射影映射 $\tilde{f} \in M(\tilde{X}; \tilde{X}')$，使 $\tilde{f}|_X = f$．而且 $\tilde{f}(\infty_X) \subset \infty_{X'}$，$\tilde{f}|_{\infty_X} = \underline{f}$（参见 2.3.1 和 4.5.2）．

(ii) 设 (E, H) 是向量空间 E 和 E 的超平面 H 的拓扑对；则 $E_H = P(E) \backslash P(H)$（参见 4.1.3.4）容有一个 $L(E/H; H)$ 上的自然的仿射空间结构．设 (E', H') 是另一个这种拓扑对，并设

$$g \in M(P(E);\ P(E'))$$

使得 g 的定义域包含 E_H（参见 4.5）且 $g(E_H) \subset E'_{H'}$；则限制映射 $g|_{E_H} \in A(E_H; E'_{H'})$.

(iii) 对应 $X \rightsquigarrow (\hat{X}, \tilde{X})$ 和 $(E, H) \rightsquigarrow E_H$ 互为逆对应，而且具有函子性质.

上述定理主要来自 2.2.6，2.3.7，3.1.6 和 4.5. 对 (ii)，应证明 $g|_{E_H} \in A\ (E_H;\ E'_{H'})$. 事实上，设 $f \in L(E;\ E')$ 使 $\underline{f} = g$；应证明 $f \in L_{H,H'}(E;\ E')$（参见 2.3.6）.

根据假设，g 定义在整个 E_H 上，换句话说（参见 4.5.2）有 $f^{-1}(0) \subset H$；而由 $g(E_H) \subset E_{H'}$ 可推出 $f(x) \notin H'$ $\forall x \notin H$；由此可知 $f(H) \subset H'$ 而且映射 $\underline{f}: E/H \rightarrow E'/H'$ 是单射. 函子性质可由 3.2.1 得出. 为了严格地说清楚 (iii) 中的两个对应是互逆的，必须用范畴的语言. 定理 5.1.3 说明 $(E, H) \rightsquigarrow E/H$ 是"完全一意的函子".

对实用而言，(i) 和 (ii) 已足够了，(iii) 是使理论上完美一些. 其实，应用的时候，即便只有 5.0.2.1 和 4.2.4.1 也就够了.

5.2 例　　子

5.2.1 扩张的特征. 根据 2.3.3.12 和 4.5.9，仿射空间的扩张的特征是：

$$f \in \mathrm{Dil}(X) \Longleftrightarrow \tilde{f}|_{\infty_X} = \mathrm{Id}_{\infty_X};$$

也就是说，扩张是这样的 f 的集合，其中每个 f 相应的 $\tilde{f}$ 都使无穷远处的 X 的超平面点点不变.

5.2.2 仿射群与射影群. 至于使 ∞_X 整体不变的 $g \in \mathrm{GP}(\tilde{X})$，就恰好是 $g = \tilde{f}$，其中 f 取遍 $\mathrm{GA}(X)$. 如果愿意，可以把 $\mathrm{GA}(X)$ 等同于 $\mathrm{GP}(X)$ 的一个子群，即 $\mathrm{GP}_{\infty_X}(\tilde{X})$. Cayley 发现的原则是，任何经典几何群都可表示为一个适当的射影空间的射影群的子群：例如可参见 9.5.5.2，18.10.1.5.

5.2.3 $X = K$ 的情形. 这时 $P(\tilde{X}) = P(K) = P^0(K)$ 仅有一点

$\infty=\infty_K$，即K的唯一的无穷远点；于是$\tilde{K}=K\cup\infty$。若$K=\mathbf{R}$，应该将$\tilde{\mathbf{R}}=\mathbf{R}\cup\infty$跟我们在分析中碰到的完备化数轴

$$\bar{\mathbf{R}}=\mathbf{R}\cup\{-\infty\}\cup\{+\infty\}$$

区分开来；在射影几何中，"趋于$+\infty$"和"趋于$-\infty$"是没有区别的. 另外，我们仍回到任意域K的情形，这时很自然地可以把$\hat{K}$等同于K^2，从而$\tilde{K}$等同于$P^1(K)$；在这种等同关系下，$x\in K$等同于$p(x,1)$，∞等同于$p(1,0)$. 记$\tilde{K}=K\cup\infty$，则关于射影映射f，其中$M(f)=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$的 4.5.15 成为：

5.2.4

$$c\neq 0\begin{cases} t\longmapsto \dfrac{at+b}{ct+d} & \left(t\neq -\dfrac{d}{c}\right) \\ -\dfrac{d}{c}\longmapsto\infty \\ \infty\longmapsto\dfrac{a}{c} \end{cases}\qquad c=0\begin{cases} t\longmapsto\dfrac{at+b}{d} \\ \infty\longmapsto\infty. \end{cases}$$

5.2.5 若$K=\mathbf{R}$或$\mathbf{C}$，且若维数有限，则 4.3.2 说明X在$\tilde{X}$中的嵌入是到象集上的同胚；4.6.1 说明X是开集并且在$\tilde{X}$中处处稠

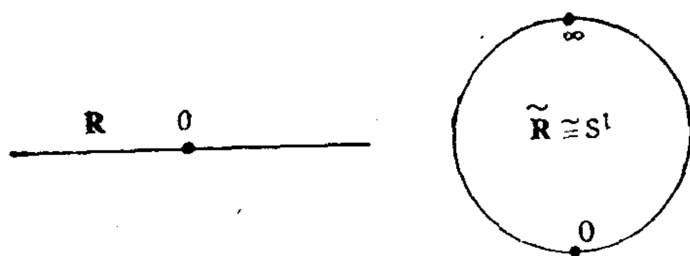


图 5.2.6.1.

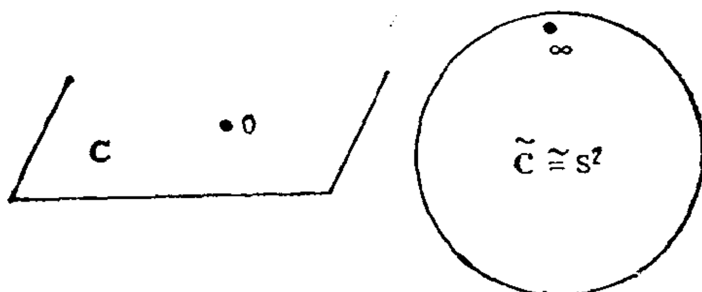


图 5.2.6.2.

密．这一点再加上 5.2.3，就说明了 4.5.15 的最后一段．

在以上讨论中我们也注意到，对规范拓扑而言，$A(X;X')$ 中或 $M(P(E);P(E'))$ 中所有的映射都是连续的．而且在维数任意的情形下，$\tilde{f}$ 总是 f 凭借 $f\in A(X;X')$ 的连续性所作的延拓．

5.2.6 对 $K=\mathbf{R}$ 或 $\mathbf{C}$，4.3.2 和 4.3.3 证明了 $\tilde{K}$ 就是 K 的 Alexandroff 紧化空间．

5.3 仿射子空间和射影子空间的联系；平行性

我们会看到，我们的结构保证了两条平行直线在完备化空间中有公共的无穷远点．

5.3.1 设 $S\subset X$ 是仿射空间 X 的仿射子空间；则 S 是嵌入 $\tilde{X}$ 的：$S\subset\tilde{X}$．根据 2.4.2.3，由 $\tilde{X}$ 的子集 S 所生成的 $\tilde{X}$ 的射影子空间 $\langle S\rangle$，是等同于 S 的射影完备化空间 $\tilde{S}$ 的；因而有 $\langle S\rangle=\tilde{S}=S\cup\infty_S$，其中 ∞_S 是 $\tilde{X}$ 的一个子集，即 $\infty_S=\infty_X\cap\langle S\rangle=\infty_X\cap\tilde{S}$．记 $\infty_S=P(\vec{S})\subset P(\vec{X})=\infty_X$．由定义 2.4.9.1 就有：

5.3.2 命题． 映射 $S\longmapsto\tilde{S}$ 是从 X 的仿射子空间的集合到 $\tilde{X}$ 中不含于 ∞_X 的射影子空间的集合的双射；有 $\tilde{S}=\infty_S\cup S$，其中 $\infty_S=\infty_X\cap\tilde{S}$．而且，若 S，S' 是两个仿射子空间，则：

$$\infty_S=\infty_{S'}\Longleftrightarrow S/\!/S',\quad \infty_S\subset\infty_{S'}\Longleftrightarrow S\triangleleft S'.$$

5.3.3 附注． 若 $K=\mathbf{R}$ 或 $\mathbf{C}$，且若维数是有限的，则 5.2.5 证明

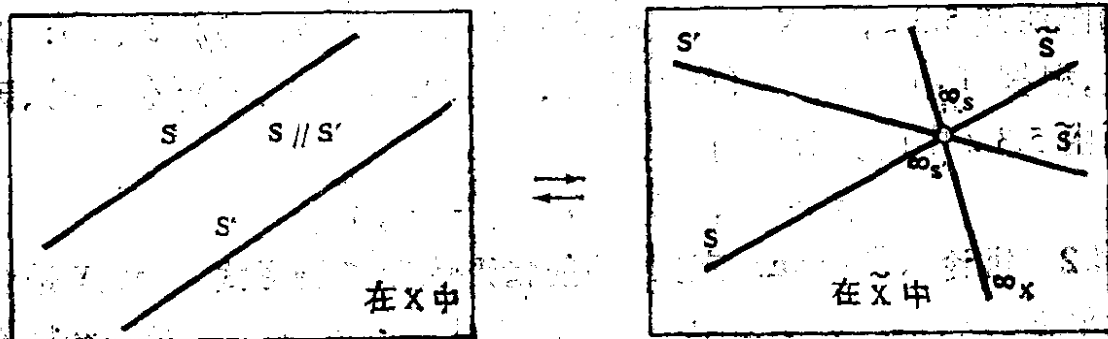


图 5.3.3.

了 $\tilde{S}$ 是 S 在 $\tilde{X}$ 中的拓扑闭包。

5.4 无穷远处的讨论；应用

5.4.1 命题（Pappus 定理，射影的情形）. 设 $P(E)$ 是射影平面，D 和 D' 是 $P(E)$ 上两条不同的直线，a, b, c, a', b', c' 是不同的六个点，$a, b, c \in D \backslash (D \cap D')$ 而 $a', b', c' \in D' \backslash (D \cap D')$，则 $\langle a, b' \rangle \cap \langle a', b \rangle$，$\langle b, c' \rangle \cap \langle b', c \rangle$ 和 $\langle c, a' \rangle \cap \langle c', a \rangle$ 三点共线。

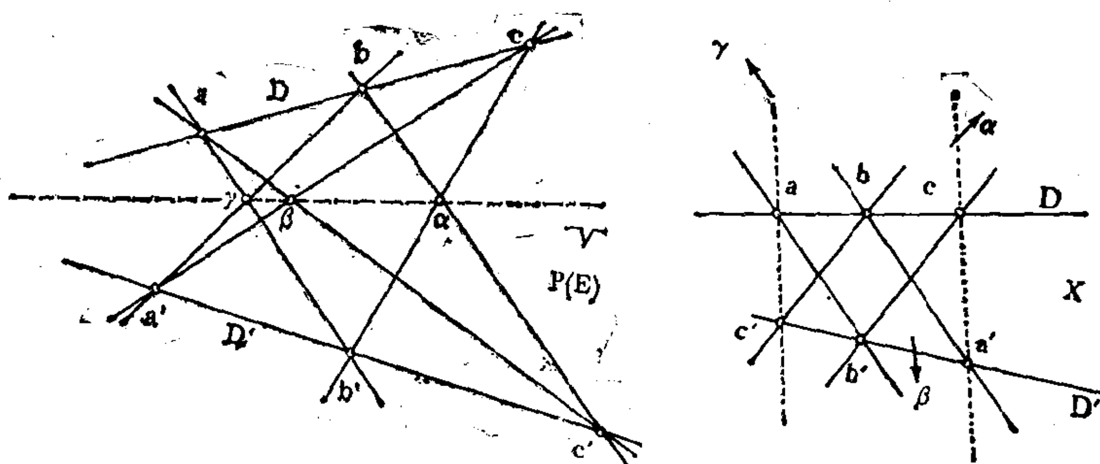


图 5.4.1.

首先注意到，根据 4.6.12，这三点总是存在的；置

$$\gamma = \langle a, b' \rangle \cap \langle a', b \rangle, \quad \alpha = \langle b, c' \rangle \cap \langle b', c \rangle,$$

并设 $V = \langle \alpha, \gamma \rangle$ 是连接这两点的射影直线. 作仿射平面 $X = P(E) \backslash V$（参见 5.1.3 (ii)）；注意到 $a, b, c, a', b', c' \in X$. 由 V 的作法及 5.3.2，在 X 中有 $\langle a, b' \rangle /\!/ \langle a', b \rangle$ 和 $\langle b, c' \rangle /\!/ \langle b', c \rangle$；因此，根据 Pappus 定理（仿射情形，2.5.3）有：$\langle a, c' \rangle /\!/ \langle a', c \rangle$，因而由 5.3.2 中的充分性有

$$\beta = \langle a, c' \rangle \cap \langle a', c \rangle \in \langle \alpha, \gamma \rangle.$$

5.4.2 推论（Pappus 定理，仿射情形的第二种形式）. 设 X 是仿射平面，D 和 D' 是 X 中两条不同的直线，a, b, c, a', b', c' 是不同的六点，$a, b, c \in D \backslash (D \cap D')$，$a', b', c' \in D' \backslash (D \cap D')$，则

$\langle a, b'\rangle\cap\langle a', b\rangle$, $\langle b, c'\rangle\cap\langle b', c\rangle$ 和 $\langle c, a'\rangle\cap\langle c', a\rangle$ 三点在下述意义下共线：若这三点都存在，则它们共线；若只有其中两点存在，则连接这两点的直线跟决定第三点的那两条直线都平行(若一点都不存在，则就是 2.5.3 中的情形).

由 5.4.1，再应用 X 的完备化空间 $\tilde{X}$ 就可得证．我们看到，由于没有例外的情况，射影几何的命题要比仿射几何来得简洁．也可参见 16.8.19.

5.4.3 命题（Desargues 定理，射影的情形）． 设 $P(E)$ 是射影空间，s, a, b, c, a', b', c' 是 $P(E)$ 中七个不同的点，而且 s, a, b, c 和 s, a', b', c' 射影无关，$a'\in\langle s, a\rangle$，$b'\in\langle s, b\rangle$，$c'\in\langle s, c\rangle$；则 $\langle a, b\rangle\cap\langle a', b'\rangle$，$\langle b, c\rangle\cap\langle b', c'\rangle$，$\langle c, a\rangle\cap\langle c', a'\rangle$ 三点共线．换言之，若连接两个三角形的对应顶点的直线是共点的，则它们的对应边的交点共线．

5.4.4 在 $\dim(P(E))\geqslant 3$ 和 $\dim(P(E))=2$ 这两种情形下，证明是不同的． 若 $\dim(P(E))\geqslant 3$，只须用到子空间的交的性质，因而结论对任何公理化体系都适用（参见 2.6.7）；若 $\dim(P(E))=2$，就要用到定理 2.5.4，其中涉及基域，从而涉及基域的结合性：见 2.5.5，4.8.3.

5.4.5 首先，假设由这七个点所生成的射影子空间 Z 确是三维的；这时由 4.6.12 很容易得出我们的结论，因为所考虑的三点都同时属于平面 $\langle a, b, c\rangle$ 和 $\langle a', b', c'\rangle$，而这两个平面的交是一条

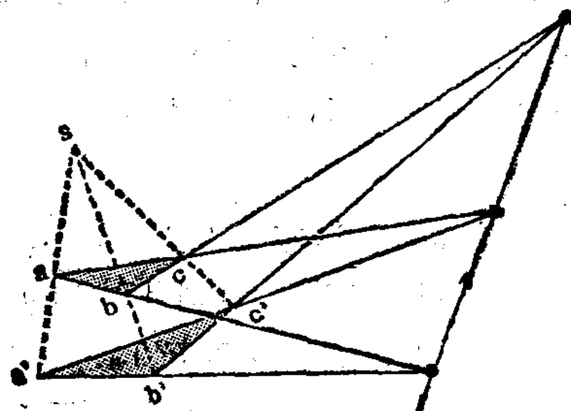


图 5.4.5.1.

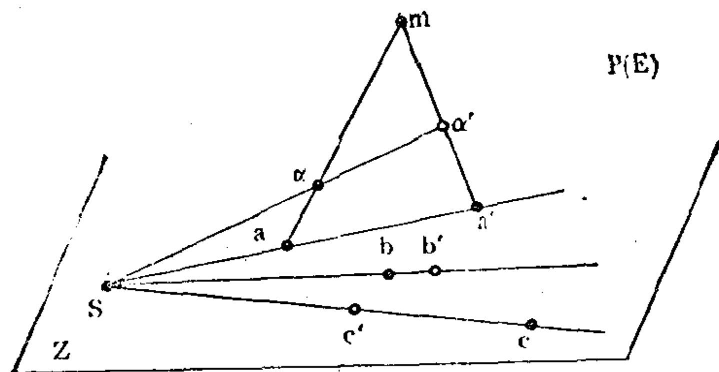


图 5.4.5.2.

直线(否则 Z 将成为二维的).

现在假设 $\dim(P(E)) \geqslant 3$ 但 $\dim Z = 2$; 任取一点 $m \notin Z$, 在直线 $\langle m, a\rangle$ 和 $\langle m, a'\rangle$ 上分别取点 α 和 α', 使 $s \in \langle \alpha, \alpha'\rangle$ 且 $\alpha \neq a$, $\alpha' \neq a'$ (这样的点 m, α 和 α' 总是可以找到的, 因为一条射影直线至少包含三点,参见 4.1.3.7).

这样, $s, \alpha, \alpha', b, b', c, c'$ 七点就生成了一个三维子空间, 因而由前段可知它们满足 Desargues 定理的条件. 但若从 m 出发将 $P(E)\setminus\{m\}$ 投影到 Z 上, 这一投影是保留交及共线的性质的; 以上取点时可知 α 和 α' 分别投影到 a 和 a', 于是命题对 s, a, a', b, b', c, c' 成立.

5.4.6 若 $\dim(P(E)) = 2$, 证明与 5.4.1 类似; 我们在无穷远处考察 $\langle a, b\rangle \cap \langle a', b'\rangle$ 和 $\langle b, c\rangle \cap \langle b', c'\rangle$ 这两点. 于是从 2.5.4 的逆命题可得结论(参见 2.8.6).

5.4.7 推论 (Desargues 定理,仿射情形的第二种形式). 设 X 是仿射空间, X 中有七个点满足与 5.4.3 中类似的假设条件, 则相应的三个交点共线,当有的点不存在时共线的意义有如 5.4.2 中所说明的那样.

5.4.8 定理 (射影几何第二基本定理). 设 $P(E), P(E')$ 分别是在域 K 和 K' 上的两个维数有限、相同且≥2 的射影空间. 设

$$f: P(E) \to P(E')$$

是双射且使 $\forall$ 共线的 $a, b, c \in P(E)$ 有 $f(a), f(b), f(c)$ 在 $P(E')$ 中共线,则存在半线性双射 $\hat{f}: E \to E'$ 使 $f = \hat{f}$.

跟 2.6.6 中的证明一样，我们证明 f 是 $P(E)$ 的超平面到 $P(E')$ 的超平面的双射．然后固定 $P(E)$的超平面 $P(H)$，其象为超平面 $P(H')\subset P(E')$． 限制映射 $g=f|_{P(E)\setminus P(H)}$: $E_H\to E'_{H'}$ 是从仿射空间 E_H 到仿射空间 $E'_{H'}$ 的映射并满足 2.6.3 的假设条件．因此 g 是半仿射映射；根据 5.1.3 中半仿射情形的讨论，g 很容易延拓成半射影映射 $\tilde{g}:P(E)\to P(E')$，由以上讨论可知 $\tilde{g}$ 在 E_H 上与 f 是一样的，由 $\tilde{f}|_{P(H)}=\tilde{g}$（参见 5.1.3）可知 $\tilde{g}$ 在 $P(H)$ 上也与 f 一样．

5.4.9 与 5.4.8 有关的详细论述，可见 [FL]，第 83 页以后和第 267 页以后；也可见 [BI 5]，AII，第 203—204 页的练习 16 和 17．关于 5.4.8 的一个推广，可见 [TS]，第 VIII 页．

5.4.10 这种在无穷远处考察的方法，以后还经常会用到：参见 5.5.3，6.4.4，6.4.8，6.4.10 以及第 17 章相当大的篇幅．

5.5 练　　习

5.5.1 叙述并证明 5.4.1 和 5.4.3 的逆命题．

5.5.2 作出 5.4.2 和 5.4.7 中各种不同的平行情况的图形．

5.5.3 考察若干无穷远点，证明 Möbius 四面体的存在性（参见 4.9.12）．

5.5.4 纸上有两条不在纸内相交的直线．只用直尺，作出连接纸上一点到这两条直线的交点的直线．

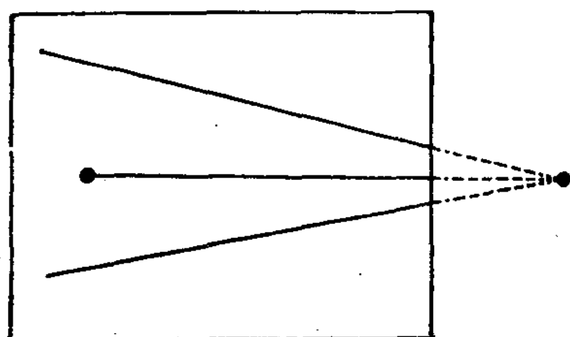


图 5.5.4．

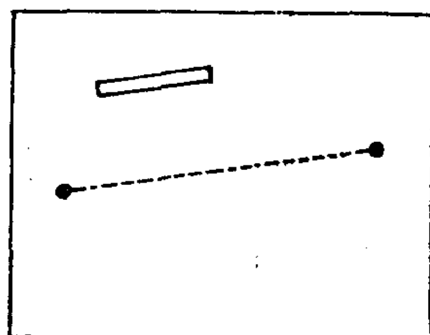


图 5.5.5．

5.5.5 只用一把很短的直尺，作出纸上两点的连线.

5.5.6 研究并评论［DX］第 28 页起关于射影几何基本定理的证明.

5.5.7 讨论在什么条件下，5.4.1 中的直线$\langle\alpha, \beta, \gamma\rangle$经过 $D\cap D'$.

5.5.8 **六边形织图.** 所谓实仿射平面 P 上的织图，就是在 P 上给定一个开集 A，并在 A 上每点 a 处给定 P 中过 a 点的、连续依赖于 a 的三条相异直线 $d_i(a)(i=1, 2, 3)$. 证明：若 b 在 $d_1(a)$ 上足够靠近 a，则可定义六个点 $(b_i)_{i=1,\cdots,6}$ 如下：

$$b_1=d_3(b)\cap d_2(a),\ b_2=d_1(b_1)\cap d_3(a),\ b_3=d_2(b_2)\cap d_1(a),$$
$$b_4=d_3(b_3)\cap d_2(a),\ b_5=d_1(b_4)\cap d_3(a),\ b_6=d_2(b_5)\cap d_1(a).$$

如果对任何足够邻近的 a 和 b 总有 $b_6=b$，就称这样的织图为六边形织图.

设 $(p_i)_{i=1,2,3}$ 是 P 上不共线的三点，A 是两两连接点 p_i 所得三直线的并集在 P 中的余集. 对每点 $a\in A$，定义织图

$$d_i(a)=\langle a, p_i\rangle.$$

证明这是六边形织图.

关于织图的进一步的内容，可见［BL-BO］和［CH-GR］，也可参见 5.5.9 和第 172 页的图.

5.5.9 **六边形织图（续）.** 证明第 172 页的图 172.2 上的织图是六边形织图. 更一般地，证明若对圆锥曲线 C 和不在 C 上的 p 点，过任一点 x 作 C 的两条切线和直线 xp，这样得到的织图必是六边形织图.

第6章 射影直线;交比，射影变换，对合

这一章介绍射影空间中共线的四点的一个（射影变换）不变量，即交比．这个不变量以射影变换下相互变换的共线的四点作为特征，在射影几何中起着本质的作用．一个重要的特例是调和分割．

本书中几乎经常碰得到交比，有时还会在颇出人意料的情形下碰到它：Laguerre 公式(8.8.7)，双曲几何(第 19 章)，Ricatti 方程(6.8.12)，微分几何(6.8.20)以及 Cayley 原则的说明(5.2.2)．

6.1 交比的定义

6.1.1 对 4.6.9 可作如下解释：单从射影群的观点来看，一条射影直线上不同三点构成的点组彼此都是一样的；或者，还可以这么说：射影群 $GP(E)$ 在 $P(E)$ 中所有共线的相异三点所构成的点组的集合上是可迁的，也即它是三重可迁的，参见 1.4.5．

这个结论对四个点的情形是否还能成立呢？下面就借助于一个在 $\widetilde{K}$ 中取值的数量，即四点的交比，来对共线的四点组在 $GP(E)$ 下的轨道进行分类．

6.1.2 定义． 设 D 是 K 上的射影直线，$\{a, b, c, d\}$ 是 D 上四点，其中 a, b, c 各不相同．$\widetilde{K}=K\cup\infty$ 中的元素 $f_{a,b,c}(d)$ 称为这四个点的交比，记作 $[a, b, c, d]=f_{a,b,c}(d)$；其中 $f_{a,b,c}$ 表示使 $f(a)=\infty$，$f(b)=0$，$f(c)=1$ 的唯一的同构

$$f_{a,b,c}\in \operatorname{Isom}(D;\widetilde{K})$$

(参见 4.6.9)．若

$$\{a, b, c, d\}=\{a_i\}\quad i=1, 2, 3, 4,$$

有时也记为 $[a_1, a_2, a_3, a_4]=[a_i]$. 若 $\{a, b, c, d\}$ 是射影空间中共线四点，而且前三点各不相同，则它们的交比定义为在它们所决定的直线上的交比. 若 a, b, c, d 是K上仿射空间X中共线四点，而且前三点各不相同，则它们的交比定义为它们在X的射影完备化空间 $\widetilde{X}$ 中的交比.

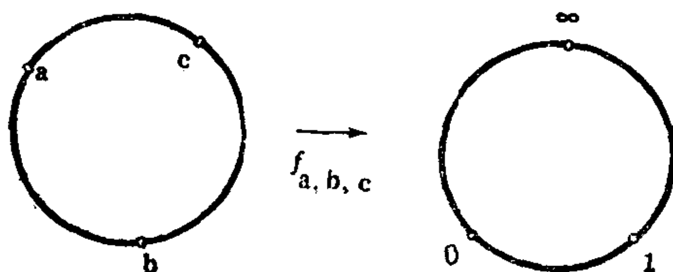


图 6.1.2.

由 4.6.9 可推出以下结论:

6.1.3 若 $[a, b, c, d]=\infty$ (相应地, 0, 1), 则 $d=a$ (相应地, $d=b, d=c$), 反之亦然. 若 $[a, b, c, d]\in K\backslash\{0, 1\}$, 则 $d\neq a, b, c$, 反之亦然(因为 $K\backslash\{0, 1\}=\widetilde{K}\backslash\{\infty, 0, 1\}$).

6.1.4 推论. 设 D, D' 是两条射影直线,

$$(a_i)_{i=1,2,3,4}\subset D \text{ 且 } (a_i')_{i=1,2,3,4}\subset D',$$

a_i 和 a_i' 的前三点又分别是各不相同的，则

$$\exists f\in \mathrm{Isom}(D;D')\,|\,f(a_i)=a_i' \quad \forall i \iff [a_i]=[a_i'].$$

6.1.5 推论. 设D是射影直线, a, b, c 是D上相异三点. 只要 $k\in\widetilde{K}$, 就唯一地存在一点 $d\in D$ 使 $[a, b, c, d]=k$.

6.1.6 命题. 设 $D=P(E)$ 是射影直线, a, b, c是D上相异三点，而且(参见 4.4.1) $x, y\in E$ 使

$$a=p(x),\ b=p(y),\ c=p(x+y),$$

则 (参见 5.2.3):

$$d=p(kx+hy)\iff[a, b, c, d]=p(k, h)\in P(K^2)\sim\widetilde{K}.$$

根据 5.2.3, 若 $\{e_1, e_2\}$ 是 K^2 中的规范基，则

$$p(e_1)=p(1, 0)=\infty,\ p(e_2)=p(0, 1)=0,$$
$$p(e_1+e_2)=p(1, 1)=1.$$

因此 $f_{a,b,c}=f$，其中 $f\in L(E;K^2)$ 由 $f(x)=e_1$，$f(y)=e_2$ 所定义，因为

$$f(x+y)=f(e_1+e_2),$$

从而

$$f(d)=f(p(kx+hy))=p(f(kx+hy))=p(k,h).$$

6.1.7 附注. 命题 6.1.6 的结论常被用作交比的定义．而且，在 K 为非交换的情形，这是唯一可能的定义方法，参见 6.8.13.

我们也可以用 6.2.3 直接定义交比，只要我们先验证那个式子在线性群 GL(2; K) 下不变；这一点是很容易的．但要说明反过来也对，就得系统地找出 GL(2; K) 的"不变量"．关于这一点，可参见 [DI-CA]，第 23 页．也可参见 [SF1]，[SF2] 和 18.10.7.

6.2 交比的具体计算

6.2.1 问题是计算 $[a_i]$，这里 a_i 在 $E(D=P(E))$ 的一个任取的基 $\mathscr{B}$ 下的齐次坐标(参见 4.2.3)已经给出：

$$a_i=p(x_i)=p(\lambda_i,\mu_i)\ (i=1,2,3,4).$$

我们有

$$x_3=\alpha x_1+\beta x_2,\quad x_4=\gamma x_1+\delta x_2,$$

因此

$$x_4=\frac{\gamma}{\alpha}(\alpha x_1)+\frac{\delta}{\beta}(\beta x_2),$$

于是(参见 6.1.6) $[a_i]=p\left(\frac{\gamma}{\alpha},\frac{\delta}{\beta}\right)$. 根据 Cramer 法则，对在基 $\mathscr{B}$ 下的行列式有

$$\alpha=\frac{\det(x_3,x_2)}{\det(x_1,x_2)},\qquad \beta=\frac{\det(x_1,x_3)}{\det(x_1,x_2)},$$

$$\gamma=\frac{\det(x_4,x_2)}{\det(x_1,x_2)},\qquad \delta=\frac{\det(x_1,x_4)}{\det(x_1,x_2)},$$

由此即得

6.2.2

$$[a_i]=p\left(\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{\begin{vmatrix}\lambda_1 & \lambda_2\\ \mu_1 & \mu_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\lambda_3 & \lambda_2\\ \mu_3 & \mu_2\end{vmatrix}},\quad \frac{\delta}{\beta}=\frac{\begin{vmatrix}\lambda_1 & \lambda_4\\ \mu_1 & \mu_4\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\lambda_1 & \lambda_3\\ \mu_1 & \mu_3\end{vmatrix}}\right),$$

通常我们约定，当分母为零时比式表示点 $\infty\in\widetilde{K}$（跟 5.2.4 一致），并将上式写成

6.2.3

$$[a_i]=\frac{\begin{vmatrix}\lambda_3 & \lambda_1\\ \mu_3 & \mu_1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\lambda_3 & \lambda_2\\ \mu_3 & \mu_2\end{vmatrix}}\Bigg/\frac{\begin{vmatrix}\lambda_4 & \lambda_1\\ \mu_4 & \mu_1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\lambda_4 & \lambda_2\\ \mu_4 & \mu_2\end{vmatrix}}.$$

设 D 是仿射直线，其上四点 (a_i) 的前三点各不相同；在任一仿射坐标下，若 a_i 的坐标为 $x_i(i=1,2,3,4)$，则在 $\widetilde{D}$ 中有 $a_i=p(x_i,1)$，因而 6.2.3 式证明了(参见 2.4.6)：

6.2.4

$$[a_i]=\frac{x_3-x_1}{x_3-x_2}\Big/\frac{x_4-x_1}{x_4-x_2}=\frac{\overrightarrow{x_3x_1}}{\overrightarrow{x_3x_2}}\Big/\frac{\overrightarrow{x_4x_1}}{\overrightarrow{x_4x_2}}.$$

特别当 a,b,c 是仿射空间 X 中直线 D 上共线的三点时，在 $\widetilde{X}$ 中有：

6.2.5

$$[a,b,c,\infty_D]=\frac{\overrightarrow{ca}}{\overrightarrow{cb}}.$$

6.2.4 式在仿射的背景上给出了交比的初等定义.

6.2.6 小结. 6.2.5 式从几何上帮助我们看到：射影空间中一个超平面的余集 $P(E)\backslash P(H)=E_H=\hat{X}$（参见 5.1.3 和 2.2.6）必有一个自然的仿射结构. 其实，如果情况真是这样，就理应可以定义一些几何上的概念，譬如说落在 X 的一个向量化空间 X_a 中的和 $b+c$，以及共线四点的商 $\overrightarrow{ca}/\overrightarrow{cb}$. 6.2.5 式解决了第二个问题，而对 $P(E)$ 用平行四边形法则（参见 2.6.6.3）则可解决第一个问题.

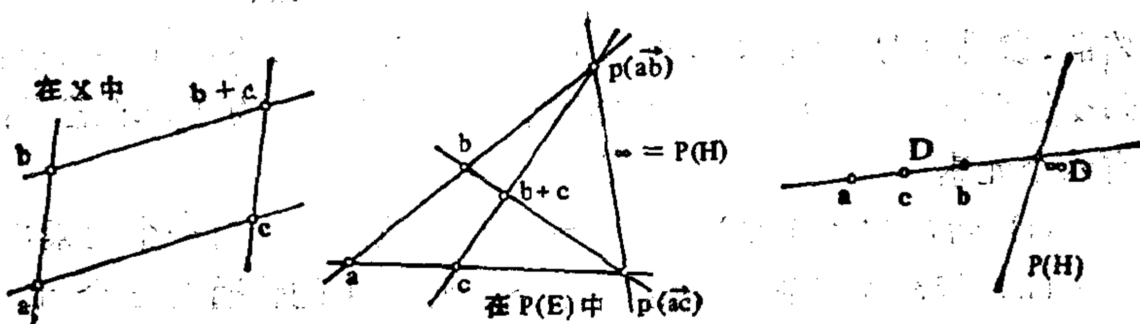


图 6.2.6.

6.2.7 交比的几何运算. 见 6.5.6, 6.5.10, $K=\mathbf{C}$ 的情形见 9.6.5.

6.3 置换的作用

设 (a_i) 是射影直线 D 上相异四点(这就假定了 $K\neq \mathbf{Z}_2$!);它们的交比实质性地与次序有关,确切地说,首先有:

6.3.1 命题

$$[a,b,c,d]=[b,a,c,d]^{-1}=[a,b,d,c]^{-1},$$

$$[a,b,c,d]+[a,c,b,d]=1.$$

前两式可由 6.2.3 得出. 为证第三式,记

$$a=p(x),\ b=p(y),\ c=p(x+y),\ d=p(kx+y);$$

则 $[a,b,c,d]=k$.

若将基 $\{x,y\}$ 换成基 $\{-x,x+y\}$, 就有

$$y=-x+(x+y),\ kx+y=(1-k)(-x)+(x+y),$$

因此 $[a,c,b,d]=1-k$ (参见 6.1.6).

由于 6.3.1 的三个式子对应着 $\{a,b,c,d\}$ 的三个对换, 而它们生成了这四点的全体置换所成的群,所以,任何一个置换的作用就清楚了. 为了说得更透彻,我们稍稍将问题提得复杂一些.

6.3.2 命题. 设 $K^{\bullet}=K\backslash\{0,1\}$, $\mathfrak{S}_4$ 是$\{1,2,3,4\}$的对称群;设 D是射影直线, (a_i) 是 D 上相异四点, $k=[a_i]$ 是它们的交比. 则交比 $\sigma(k)=[a_{\sigma(i)}]\in K^{\bullet}$ 只依赖于 k 和 $\sigma\in\mathfrak{S}_4$, 而与 D 或 a_i 都无关. 映射 $\varphi:\mathfrak{S}_4\ni\sigma\longmapsto k\longmapsto\sigma^{-1}(k)\in\mathfrak{S}_{K^{\bullet}}$ 是 $\mathfrak{S}_4$ 到 $K^{\bullet}$ 中的一个作用. 群 $\mathfrak{S}_4$ 的作用不是一意的;其核 $\mathrm{Ker}\varphi$ 是 Klein 群 $\mathscr{K}_4$ (矩

阵群,参见 0.2),除非K是四个元素的体 F_4, 那时 $\operatorname{Ker}\varphi=\mathscr{A}_4$,即交错群. 除了以下三种例外情形, $\mathfrak{S}_4$ 在 $K^\bullet$ 中的任一轨道都含有六个元素:

(i) 若K的特征数为 3, $k=-1$ 的轨道只含有一个元素;

(ii) 若K的特征数不是 2 和 3, 则 -1 的轨道有三个元素 $\{-1, 2, 1/2\}$, 而若K包含 1 的立方根 j 和 j^2, 则 $-j$ 的轨道有两个元素 $\{-j, -j^2\}$;

(iii) 若 $K=F_4$, 只有一个轨道,它有两个元素.

由 6.3.1, 我们知道 $\operatorname{Ker}\varphi\supset\mathscr{V}_4$; 现在来求 k 的轨道: 应用 6.3.1 即知唯一的可能是:

$$k,\ \frac{1}{k},\ 1-k,\ 1-\frac{1}{k},\ \frac{1}{1-k},\ \frac{k}{k-1}.$$

应讨论这六项是否 $K^\bullet$ 中的不同元素;而它们两两相等, 就等价于下列方程:

$$k^2-1=0,\ k^2-k+1=0,\ 2k-1=0,\ k-2=0.$$

于是 6.3.2 就已得证, 因为: $X^2-1=0$ 的除 1 以外的根是 -1, $X^3-1=0$ 的除 1 以外的根由 $X^2+X+1=0$ 给出, 于是, $\mathbf{Z}_2$ 再加上 $X^2+X+1=0$ 的两个根就得到了四个元素的体.

6.3.3 附注. 有些书上把交比(英文中称为 cross-ratio)记作

$$[a, b, c, d]=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

这种记法的优点是容易使我们想起核 $\operatorname{Ker}\varphi=\mathscr{V}_4$是怎样作用的, 因为它的作用是跟矩阵几何群, 即关于原点和两轴的对称所成的群一样的:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} b & a \\ d & c \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} c & d \\ a & b \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} d & c \\ b & a \end{bmatrix}.$$

K非交换的情形可见 6.8.13.

在 $K=\mathbf{R}$ 的情形, 我们作出一个和交比很自然地相联系的代数函数

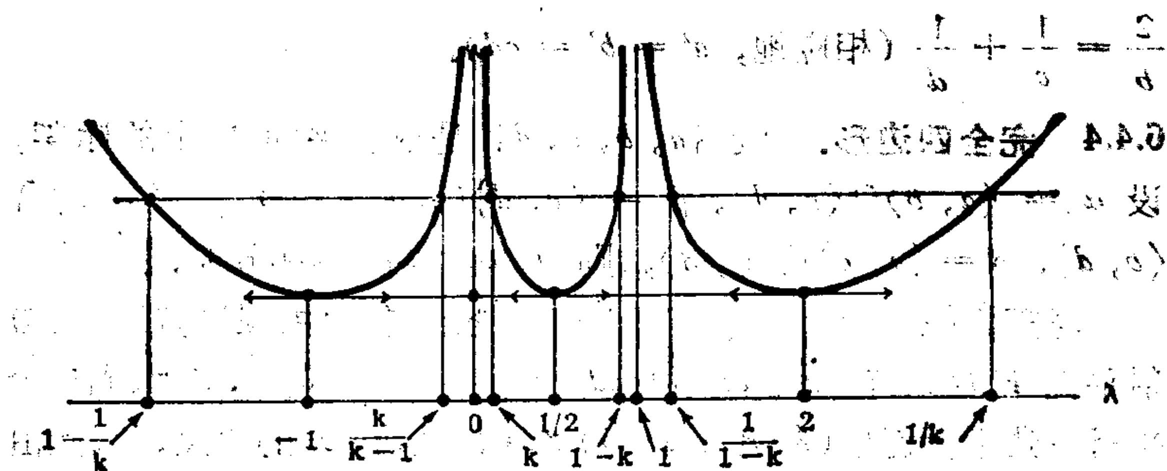


图 6.3.3.

$$k \longmapsto \frac{4}{27}\frac{(\lambda^2-\lambda+1)^3}{\lambda^2(1-\lambda)^2}$$

的图象.

这个函数在同一轨道所有的点上取相同的值；有关交比与这个函数的一些有趣的结论，可见 [DX]，第 43—51 页和 6.8.11.

6.4 调和分割(特征数 ≠2 的域)

交比的定义中允许所讨论的四点中有两点是重合的；倘若允许两个以上的点重合，势必引起一大堆麻烦，除非考虑的是 6.3.2 中碰到过的轨道$\{-1,1/2,2\}$的情形. 由此给出：

6.4.1 定义. 射影空间或仿射空间中的四点 a, b, c, d 称为**调和分割的**，如果它们满足下列条件之一：其中三点重合而第四点与之不同，或者四点都不同、共线且 $[a, b, c, d]=-1$.

我们注意到，次序是重要的：若 a, b, c, d 是调和分割的，则 b, a, c, d 不是调和分割的.

6.4.2 若 a, b, c 是仿射空间中直线 D 上共线的三点，6.2.5 证明了 a, b, c, ∞_D 调和分割的充要条件是 c 是 $\{a, b\}$ 的中点.

6.4.3 在一条仿射直线的任一仿射坐标系中，坐标为 a, b, c, d 的四点调和分割的充要条件是 $2(ab+cd)=(a+b)(c+d)$，这可从 6.2.4 推出，当 $a=0$（相应地，$b=-a$）时，上式化为

$\frac{2}{b} = \frac{1}{c} + \frac{1}{d}$ (相应地，$a^2 = b^2 = cd$).

6.4.4　完全四边形. 设 $\{a, b, c, d\}$ 是射影平面 P 上的标架，设 $\alpha = \langle a, b\rangle \cap \langle c, d\rangle$, $\beta = \langle a, d\rangle \cap \langle b, c\rangle$, $\gamma = \langle a, c\rangle \cap \langle b, d\rangle$, $\delta = \langle a, c\rangle \cap \langle \alpha, \beta\rangle$, 则 a, c, γ, δ 调和分割.

考察直线 $D = \langle \alpha, \beta\rangle$ 在无穷远处的情形；由假设，在新的仿射平面 $P\backslash D$ 上有 $ab /\!/ cd$ 和 $ad /\!/ bc$, 因而 a, b, c, d 组成一个平行四边形，而且（参见图 2.4.5）γ 现在是 a, c 的中点，因此由 6.4.2 有 $[a, c, \gamma, \delta = \langle a, c\rangle_\infty] = -1$.

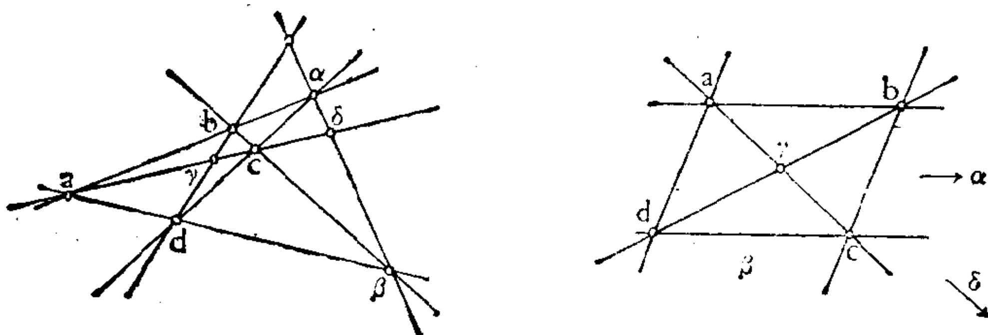


图　6.4.4.

6.4.5　根据上述结果，可作出一点 m 关于两点 a, b 的调和共轭点 n (即点 n 使 $[a, b, m, n] = -1$) 的几何构造. 为此，我们把射影或仿射直线 $\langle a, b\rangle$ 嵌入一个平面并作图如 6.4.4 所示.

6.4.6　由对称诱导的射影映射的几何构造. 设 E 是向量空间，S, T 是两个子空间，且有直和 $E = S \oplus T$; 设 f 是关于 S 平行于 T 的对称，即若 $q: E \to S$ 表示直和 $E = S \oplus T$ 相应的投影，则 f 由

$$q(x) = \frac{x + f(x)}{2} \quad \forall x \in E$$

所定义. 通过调和分割可构造射影映射 $g = \underline{f} \in \mathrm{GP}(E)$ 如下：设 $V = p(S)$, $W = p(T)$ 是由 S 和 T 导出的射影子空间，而且 $m \in P(E)$, 则存在唯一的一条射影直线 $D(m)$ 经过 m 且与 V, W 相交，$g(m)$ 是 $D(m)$ 上的点而且

$$[m, g(m), D(m)\cap V, D(m)\cap W] = -1.$$

事实上，$D(m)$ 是由一个被 x 和 $q(x)$ 完全确定的向量空间（除非 $x = q(x)$，但这时 $g(m) = m$，已合 6.4.1 条件）导出的，这向量空间是一个包含 $f(x)$ 的平面．如果把 x 和 $f(x)$ 取作这个平面的基，就有 $p(x + f(x)) = p(2q(x)) = V\cap D(m)$，$p(-x + f(x)) = p(W\cap D(m))$，因此，由 6.1.6 即得

$$[m, g(m), V\cap D(m), W\cap D(m)] = -1.$$

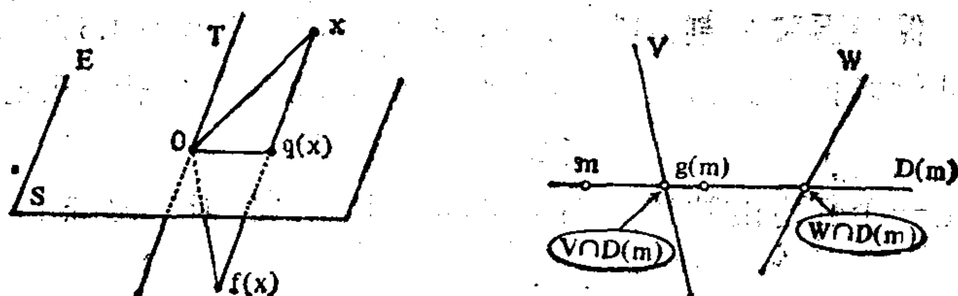


图 6.4.6.

6.4.7 附注. 一种常见的情形是 S 为超平面，这时 V 是 $P(E)$ 中一点，而 $D(m)$ 是经过这一点和 m 的直线．参照 4.5.19 可知，若 K 是代数闭域，则 $GP(E)$ 的所有对合都如上所述，因而几何结构是很简单的．

6.4.8 交比与域的结构. 怎样从一条射影直线上看出域的结构？更确切地说，如果譬如说已经给定射影直线 D 上的五点 a, b, c, d, e，使 $[a, b, c, d] + [a, b, c, e] = [a, b, c, f]$（相应地，

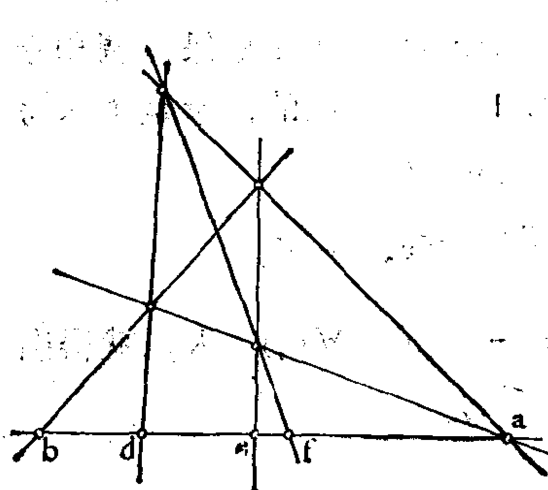


图 6.4.8.

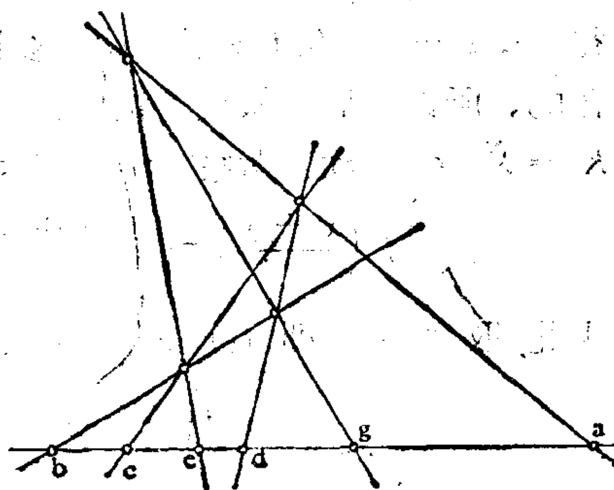


图 6.4.9.

$[a, b, c, d][a, b, c, e] = [a, b, c, g]$) 的第六个点 f(相应地，g)在哪儿？仿射几何基本定理(参见 2.6.3)启示我们，根据仅有的几种直线相交结构，是可以找到 f 和 g 的. 其实即便从 2.6.6.4 的证明也能看出这一点；这只须把 a 放在无穷远处并如 2.6.6.4.1 和 2.6.6.4.3 那样作图，看看在距离有限处图6.4.8和 6.4.9 是怎样的就行了. 当然这时得把D嵌入一个仿射平面，由 2.6.1 可知这一嵌入是不可或免的.

6.4.9 保持调和分割的映射. 根据同样的思想，由 6.4.5 和5.4.8 可知：从射影直线到自身的、保持任意四点的调和分割的双射

$$f: D \to D,$$

不会是一个任意的映射，而很可能是半射影映射. 实际上也确实如此.

6.4.10 命题(von Staudt). 设 $D = P(E)$是射影直线，$f: D \to D$ 是双射. 在D上使 $[a, b, c, d] = -1$ 的任意四点 a, b, c, d 总有 $[f(a), f(b), f(c), f(d)] = -1$ 的充要条件是存在半线性映射 $\hat{f}: E \to E$ 使 $\underline{\hat{f}} = f$.

条件是充分的：若 $\sigma: K \to K$ 是K上任一自同构，$\hat{f}$ 关于 σ 半线性，则对D的任意四点有：

$$[\underline{\hat{f}}(a), \underline{\hat{f}}(b), \underline{\hat{f}}(c), \underline{\hat{f}}(d)] = \sigma([a, b, c, d]);$$

但从 σ 是自同构即得 $\sigma(-1) = -1$.

条件是必要的：设 $\tilde{K} = D$，取 $GP(\tilde{K})$ 中适当的元素 g 使得 $0, 1$ 和 ∞ 在 $f \circ g$ 下不动 (参见 4.6.9)；但 $f \circ g$ 是保持调和分割的，所以最后可假设 f 是保持 $0, 1, \infty$ 不动的. 于是 f 保持 $K = \tilde{K} \backslash \infty$ 不动. 考察 $f: K \to K$；由 6.4.2 有

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{2} \quad \forall x, y \in K,$$

由此，取 $y = 0$ 即 $f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \forall x, y \in K$，就得出

$$f\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{f(x)}{2} \quad \forall x.$$

现在应用 6.4.3：四点 $\{1, x^2, x, -x\}$ 构成一个调和分割，因而

$\{f(1)=1, f(x^2), f(x), f(-x)=-f(x)\}$ 亦然；于是由 6.4.3 有 $f(x^2)=(f(x))^2$. 把 x 换成 $x+y$，就得 $f(xy)=f(x)f(y)$. 这样，$f:K\to K$ 就是域自同构.

6.4.11 推论(参见 2.6.4). 实射影直线上保持调和分割的双射必是射影变换；若它是复射影直线上的这样的连续双射，则必是射影变换或反射影变换(参见 18.10.2.4).

6.5 交比与对偶；应用

一条 $P(E^*)$ 的直线，即一条"超平面的直线"是什么？ 2.4.8.1 的结论给出了回答(参见 4.1.3.5)：

6.5.1 命题. $P(E^*)$ 的一条射影直线 Δ 称为 $P(E)$ 的一束超平面 ($\dim(P(E))=2$ 时称为直线束，$\dim(P(E))=3$ 时称为平面束). 存在 $P(E)$ 的一个余维数为 2 的子空间 V，使

$$\Delta=\{H\in\mathscr{H}(E):H\supset V\};$$

反之，对任何这样的 V，子集 $\{H\in\mathscr{H}(E):H\supset V\}\subset P(E^*)$ 是一条直线. 而且，$\forall x\in P(E)\setminus V$，唯一地存在一个包含 x 的 $H\in\Delta$.

一个简单而有广泛应用的结论是：

6.5.2 命题. 设 $(H_i)_{i=1,2,3,4}$ 是四个超平面(前三个各不相同)，构属于余维数为 2 的子空间 V 所对应的 $P(E)$ 的一个超平面束，D 是 $P(E)$ 中一条直线，$D\cap V=\varnothing$，则 $\forall i$，集合 $D\cap H_i$ 仅含一点 h_i，而且有交比的等式 $[h_i]=[H_i]$，其中左端在直线 D 上计算，右端在定义该超平面束的 $P(E^*)$ 的直线上计算.

由这一命题推出的结论之一是：

6.5.3 引理. 设 Δ 是一束超平面，V 是相应的子空间，D 是一条与 V 不相交的直线，则映射

$$\Delta\ni H\longmapsto H\cap D\in D$$

属于 $\mathrm{Isom}(\Delta;D)$.

设 $H,K\in\Delta$ 是不同的超平面，$a=D\cap H$，$b=D\cap K$，

$\varphi, \psi \in E^*$ 使$H = p(\varphi^{-1}(0))$, $K = p(\psi^{-1}(0))$; 则可将 φ, ψ 法

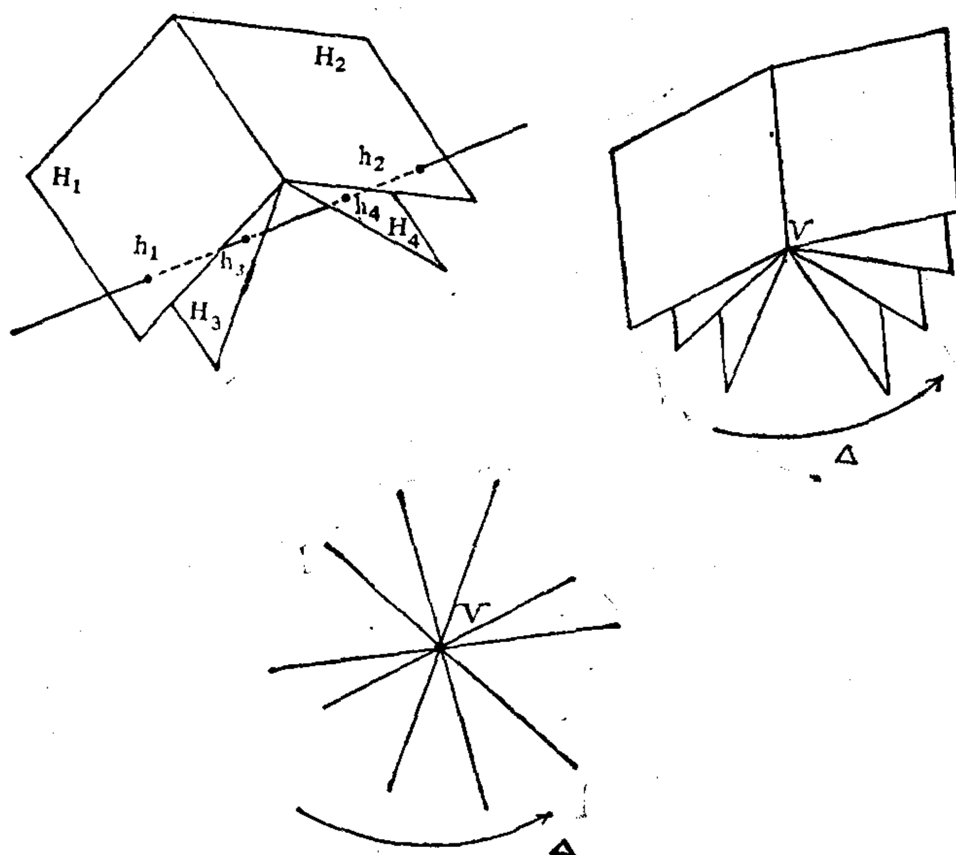


图 6.5.3.

化,使得对适合 $p(x) = a$ 和 $p(y) = b$ 的 x, y 都有

$$\varphi(x) = -\psi(x) = 1.$$

这样就有

$$D = \{p(\lambda x + \mu y) : (\lambda, \mu) \in K^2 \backslash 0\},$$

$$\Delta = \{p((\xi\varphi + \eta\psi)^{-1}(0)) : (\xi, \eta) \in K^2 \backslash 0\}.$$

当 $\xi\mu = \eta\lambda$ 时,Δ的一个元素与D的交集可写为

$$(\xi\varphi + \eta\psi)(\lambda x + \mu y) = 0;$$

而在 $P(K^2)$ 上,$\xi\mu = \eta\lambda$ 就是 $p(\lambda, \mu) = p(\xi, \eta)$, 因而是恒等式!

6.5.4 推论. H_i 和D的四个交点的交比不依赖于 D.

6.5.5 Thalès 定理: 第二种证明(参见 2.5.1).

现在X是一个仿射空间, H, H', H'' 是三个平行超平面; 在X的射影完备化空间$\tilde{X}$中,我们得到四个超平面 $\tilde{H}, \tilde{H}', \tilde{H}''$, ∞_X,

它们构成一个超平面束．由 6.5.2 和 6.2.5，就可推得定理．

6.5.6 类似地，可以计算仿射空间中共线四点 a, b, c, d 的交比如下：作出图示的结构(它们应是平面图形)． 直线 a', b', c' 应与直线 $\langle m, d\rangle$ 平行；于是

$$[a, b, c, d] = \frac{\overrightarrow{c'a'}}{\overrightarrow{c'b'}}.$$

对两直线 a, b, c, d 和 a', b', c' 应用 6.5.4，再由 6.2.5 即可得到上式．由此可以引出一个关于交比的纯仿射的(即度量的)初等的定理．

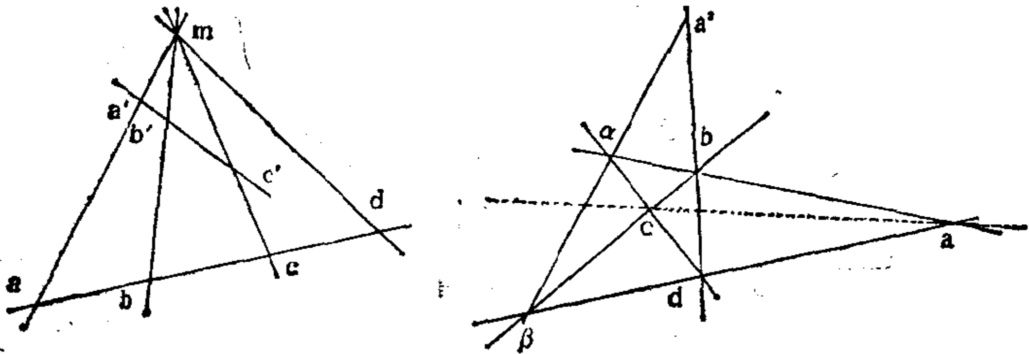


图 6.5.7.

6.5.7 一点关于两直线的极线． 设 D 和 D' 是射影平面上两条相异直线，$x \notin D \cup D'$ 是平面上一点，则经过 x 的一条直线交 D, D' 于 m, m'；x 关于 m, m' 的调和共轭点决定一条经过 $D \cap D'$ 的直线，即 $P(E^*)$ 中使 $[D, D', F, \langle x, D\cap D'\rangle] = -1$ 的直线 F，称为 x 关于 $\{D, D'\}$ 的极线（这一名称的由来可见 14.5.6）．根据极线的概念，我们可以重新证明 6.4.4，因为，a' 关于 $\{\langle \alpha, d\rangle, \langle \beta, b\rangle\}$ 的极线是相同的，从而它经过 a 和 c（图 6.5.7）．

6.5.8 下面两个对偶的结论，其证明是相仿的：

设 $\{a, b, c, d\}$，$\{a, b', c', d'\}$ 分别是两个由共线的相异四点构成的点组；则直线 $\langle b, b'\rangle$，$\langle c, c'\rangle$，$\langle d, d'\rangle$共点 $\Longleftrightarrow [a, b, c, d] = [a, b', c', d']$．对偶的结论：设射影平面上有两个四点组，分别由属于超平面束 $\{D, E, F, G\}$ 和 $\{D, E', F', G'\}$

的相异四点所构成；则点 $E\cap E'$，$F\cap F'$ 和 $G\cap G$ 共线的充要条件是

$$[D, E, F, G]=[D, E', F', G'].$$

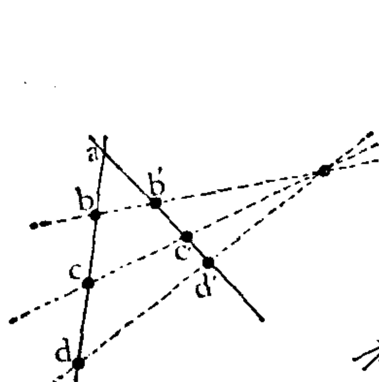
6.5.9 6.5.8 可以换一种说法．现仅叙述其中一个结论：设 m, m' 是射影平面上两点，它们生成两个直线束 Δ, Δ'，设 $f:\Delta\to\Delta'$ 是射影变换，$f\in \mathrm{Isom}(\Delta;\Delta')$，并使

$$f(\langle m, m'\rangle)=\langle m, m'\rangle,$$

则 $\{D\cap f(D):D\in\Delta\}$ 由直线 $\langle m, m'\rangle$ 和另一直线 S 构成．在 16.1.4 中我们将会看到，当 $f(\langle m, m'\rangle)\neq\langle m, m'\rangle$ 时，

$$\{D\cap f(D):D\in\Delta\}$$

是过 m 和 m' 的圆锥曲线．



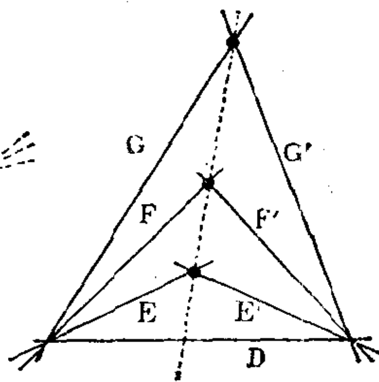


图 6.5.8.

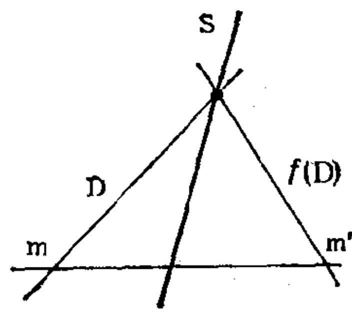


图 6.5.9.

6.5.10 交比与射影坐标． 设 $\{m_i\}_{i=0,1,\cdots,n+1}$ 是一个射影标架，x 是任意一点；根据 4.4.3，这点在标架下有坐标 $(x_1, \cdots, x_{n+1})$，在不计纯量的差别的情况下，坐标是定义好的．因此，它们是由两两之比 x_i/x_j 所确定的，这些比值在几何上表示什么呢？

6.5.11 命题． 设已给定两个指标 $i, j(i\neq j)$，H_0 和 H 是两个超平面：

$$H_0=\langle m_1, \cdots, \hat{m}_i, \cdots, \hat{m}_j, \cdots, m_{n+1}, m_0\rangle,$$
$$H=\langle m_1, \cdots, \hat{m}_i, \cdots, \hat{m}_j, \cdots, m_{n+1}, x\rangle;$$

则

$$\frac{x_i}{x_j} = [m_i, m_j, \langle x_i, x_j\rangle \cap H_0, \langle x_i, x_j\rangle \cap H].$$

在所取标架相应的基 $\{e_i\}_{i=1,\cdots,n+1}$ (参见 4.4.2)下，直线 $\langle x_i, x_j\rangle$ 上的点的坐标为 (λ, μ)，经射影变换后

$$(\lambda, \mu) \longmapsto p(\lambda e_i + \mu e_j).$$

我们有

$$(1, 0) \longmapsto p(e_i) = m_i, \ (0, 1) \longmapsto p(e_j) = m_j,$$
$$(1, 1) \longmapsto p(e_i + e_j) = \langle x_i, x_j\rangle \cap H_0,$$
$$(x_i, x_j) \longmapsto p(x_i e_i + x_j e_j) = \langle x_i, x_j\rangle \cap H,$$

这样就证明了 6.5.11 (用到 6.1.6).

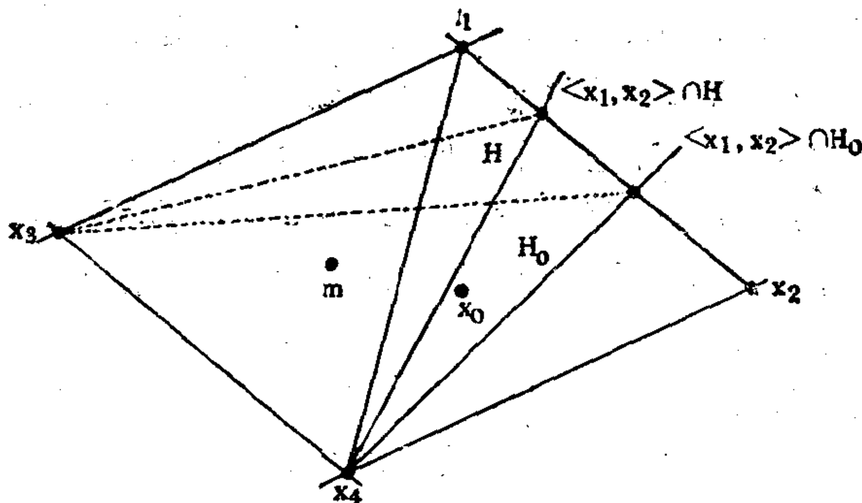


图 6.5.11.

6.6 射影直线的射影变换

有关群 GP(K) (或 GP(D)，其中 D 是射影直线，这两个群是同构的)和 GP($\tilde{K}$) 的子空间以及 GP($\tilde{K}$) 中元素的研究，已进行得很深人，尤其是在 $K=\mathbf{R}$ 或 $\mathbf{C}$ 的情形；其中涉及的群都很简单，但与大量的分析、数论和微分几何的概念有着联系. 我们在这里只给出几个很初等的结果，它们是很不全面的；若想作更系统的研究，[GN] 是一本很好的参考书，可参阅其中第 IV 章. 我

们尽管不作详细讨论，但还是给出了为数众多的参考书目，尤其是新近应用这些群所做工作的有关文献.

6.6.1 命题. 设 D 是代数闭域 K 上的射影直线，

$$f \in \mathrm{GP}(D),\ f \neq \mathrm{Id}_D,$$

则 f 有一个或两个不动点. 若 a, b 是 f 的两个相异的不动点，则交比 $[a, b, m, f(m)]$ 在 $D\setminus\{a, b\}$ 上是属于 $K\setminus\{0, 1\}$ 的常数，反之，对每一 $k \in K\setminus\{0, 1\}$，等式 $[a, b, m, f(m)] = k$ 在 D 上定义了相异不动点 a, b 的一个射影变换. 若 f 只有一个不动点 a，则 f 必为仿射直线 $D\setminus\{a\}$ 的平移.

6.6.2 根据 4.5.17，我们知道 f 至少有一个不动点(有些古典文献中也称为重点)，由 4.6.9 又可知 f 不能有两个以上的不动点. 现在把一个重点 $a \in D$, $f(a) = a$，放在无穷远处，f 就限制为仿射直线 $D\setminus\{a\}$ 的一个仿射同构；在一维的情形它必定是一个扩张(参见 2.3.3.12)，因而是一个位似或平移；若是以 b 为中心的位似，就有 $\overrightarrow{bf(m)} = k\overrightarrow{bm}\quad \forall m \in D\setminus\{a\}$，由此根据 6.2.5 就证得命题结论. 在有两个相异重点的情形，交比 $[a, b, m, f(m)]$ 的常值由下述引理给出.

6.6.3 引理. 设 $D = P(E)$，且 $g \in \mathrm{GL}(E)$ 使 $f = g$；若 $a, b \in D$ 是 D 的两个相异的不动点，又设 λ 和 μ 是与特征值 $x, y \in E$ 相应并使 $p(x) = a$, $p(y) = b$ 的 g 的特征值，则 $\forall m \in D$: $[a, b, m, f(m)] = \lambda/\mu$.

取射影标架 $\{a, b, m\}$ 为 $a = p(e_1)$, $b = p(e_2)$, $m = p(e_1 + e_2)$. g 的矩阵必为 $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$，于是有

$$f(m) = p(\lambda e_1 + \mu e_2),$$

因此由 6.1.6 即得结论.

6.6.3.1 若基域不是代数闭域，只要有一个重点，6.6.1 仍成立. 因此命题只是在没有重点时才不成立，例如

$$K = \mathbf{R},\ M(f) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

时，用 5.2.4 的写法就是：

$$t \longmapsto -\frac{1}{t},\ \infty \longmapsto 0,\ 0 \longmapsto \infty.$$

6.6.4 象焦点与物焦点. 在没有重点的这种一般情形，总可将射影变换表述如下. 把射影直线写为 $D = X \cup \infty$，其中 X 是仿射直线（或者等价地，在 D 上取一点称为 ∞）. 点 $a = f^{-1}(\infty)$（相应地，$b = f(\infty)$）称为 $f \in GP(D)$ 的**象焦点**（相应地，**物焦点**）；若 ∞ 不是重点，就有 $a, b \in X$. 由 6.1.4，有

$$[\infty, a, m, n] = [b, \infty, f(m), f(n)] \quad \forall m, n \in D.$$

应用 6.2.5 和 6.3.1 即得：

6.6.5 当 $\overline{am} \cdot \overline{bf(m)} =$ 常值时，$\dfrac{\overrightarrow{an}}{\overrightarrow{am}} = \dfrac{\overrightarrow{bf(m)}}{\overrightarrow{bf(n)}}$.

如果知道两个焦点和两个象点 $(n, f(n))$，由上式即可确定 f. 另外还可有 $a = b$.

"焦点"这个名称来自几何光学；射影变换是这样的变换，它在一个符合 Gauss 近似条件的有心光学系统中，把系统的轴上的一点映成它的光学象点. 为了说明这个映射正是在轴上补充无穷远点所得直线的射影变换，还可以这么考虑：经典公式已说明这个映射是关于平面或球面的屈光面或镜面的射影变换，而有心光学系统根据定义系由有限多个屈光面或镜面（或：屈光面和镜面）合成；有限多个射影变换的合成仍是射影变换，参见 4.5.9. 有关几何光学，例如可参见 [A-B]，第 4 章.

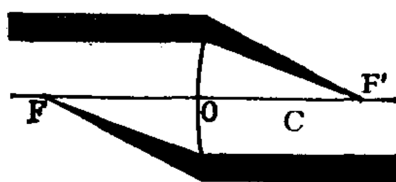


图 6.6.5.1.

6.6.6 几何结构. 关于直线的射影变换的几何结构，可见 16.3.10.1.

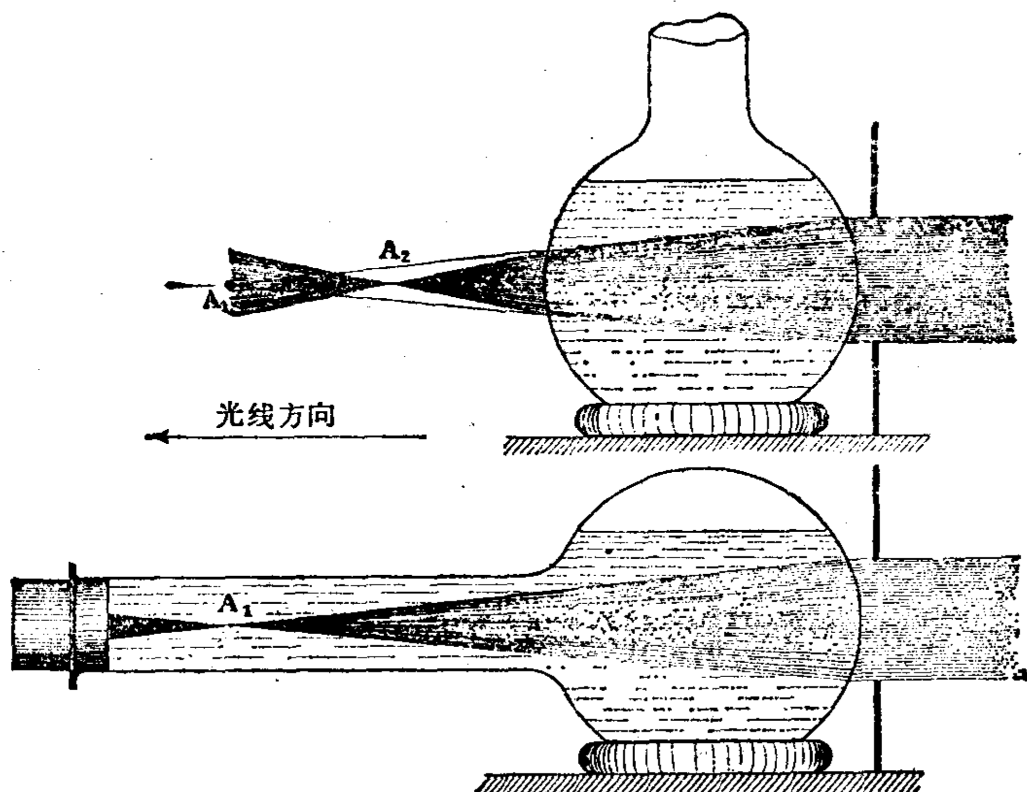


图 6.6.5.2.

引自 H. Bouasse,《初等几何光学》,巴黎 Delagrave 出版社,1917 年.

6.6.7 附注. 在下节讨论对合射影变换之前，先列出一些讨论射影变换及其在不同数学分支中应用的一般参考条目:

[GN],第 IV 章;

微分方程: 见 6.8.12;

自守函数: 见 [SA];

双曲几何: 见第 19 章;

各种有趣的几何应用: [VL];

作为球面 S^2 实现的复射影直线的射影变换: 见 18.10.2.2 和 [CH2], 第 183 页.

6.7 对 合

6.7.1 定义. 射影直线 D 的射影变换 f 若是对合的,即 $f^2 = \mathrm{Id}_D$, 而且 $f \neq \mathrm{Id}_D$, 则称为射影直线 D 的**对合**.

下面会看到，这个定义跟通常的对合定义稍有些不符，通常 $f=\mathrm{Id}$ 的情形是可以允许的．由 6.6 即可得出：

6.7.2 命题． 若对合 f 有一个不动点，则它必有两个相异不动点 a, b，而且对每点 m，f 是通过 $[a, b, m, f(m)]=-1$ 来定义的；在一般情形下，f 可用仿射的方式写为

$$\overline{am}\cdot\overline{af(m)}=\text{常值},$$

其中 a 同时是 f 的象焦点和物焦点．尤其，当 K 是代数闭域时，f 总可写为 $[a, b, m, f(m)]=-1$；当 $K=\mathbf{R}$ 时，或者 f 有不动点，或者它在某个仿射标架下可写为 $\overline{am}\cdot\overline{af(m)}=-1$．

对合的一些简单的性质可归纳为下述命题：

6.7.3 命题． 任何射影变换是至多三个对合的乘积．射影变换 f 是对合的充要条件是存在 m 使 $f^2(m)=m$ 且 $f(m)\neq m$．矩阵为 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 的射影变换是对合的充要条件是 A 的迹 $=a+d=0$．

考虑对合的合成时，可以只考虑 f 有一个不动点的情形，并将这点取为 ∞；根据 6.6.2，f 就是一条仿射直线的平移 $x\longmapsto x+t$ 或位似 $x\longmapsto\lambda x$．在第一种情况，将 $x\longmapsto -x$ 和 $x\longmapsto t-x$ 这两个对合合成起来，在第二种情况，将 $x\longmapsto\lambda/x$ 和 $x\longmapsto 1/x$ 合成起来．

取 $m=0$ 和 $f(m)=\infty$，则 $f(\infty)=0$；根据 5.2.4 的式子，就有 $c\neq 0$，$d=0$ 和 $a=0$，因此 f 是 $t\longmapsto b/ct$，这是一个对合．

若

$$M(f)=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

$$M(f^2)=\begin{pmatrix} a^2+bc & b(a+d) \\ c(a+d) & bc+d^2 \end{pmatrix},$$

如果要 $f^2=\lambda\mathrm{Id}$，则 $b(a+d)=c(a+d)=0$，因而 $a+d=0$

或 $b=c=0$. 后一种情形下 $a^2=d^2$,而由于 $f\neq \mathrm{Id}$, $a=d$ 是应排除的.

6.7.4 注. 读者容易验证下列论断: 一个对合可由两对象点 $(a, f(a))$ 和 $(b, f(b))$ $(a\neq b)$ 确定,两个不同的对合有一对公共的象点,而且当 K 是代数闭域时这对公共象点是唯一的. 这些论断也可从相应的几何构造中推出,这些构造将在 16.3.10.1 中给出. 在关于锥束的 Desargues 定理中也将碰到对合: 见 16.5.4. 最后,请参阅 [GN] 的第 IV 章,若无此书也可参看 14.8.16.

6.8 练　　习

6.8.1 设 a, b, m, n, p 是射影直线上相异五点;证明

$$[a, b, m, n][a, b, n, p][a, b, p, m]=1.$$

6.8.2 利用 6.5.8 证明 Pappus 定理和 Desargues 定理(参见5.4.1 和 5.4.3).

6.8.3 考察实数轴 $\mathbf{R}$ 的射影变换 $x\longmapsto \dfrac{ax+b}{cx+d}$, 讨论有否不动点与函数 $x\longmapsto \dfrac{ax+b}{cx+d}\left(x\neq -\dfrac{d}{c}\right)$ 的增减性两者之间是否有联系.

6.8.4 找一本几何光学的书(例如,[A-B], 第 4 章), 讨论与下列对象相应的射影变换的性质: 平面镜, 凸或凹的球面镜, 平面屈光镜,球面屈光镜,薄透镜,厚透镜;并讨论该书中给出的各种化简公式.

6.8.5 对 $K=\mathbf{R}$ 或 $\mathbf{C}$, 根据射影直线的射影变换 f 的性质, 讨论重复 n 次的变换 f^n $(n\in\mathbf{Z})$ 的性态.

6.8.6 $K=\mathbf{C}$ 时,每个射影变换是两个对合的乘积吗? $K=\mathbf{R}$ 时呢?

6.8.7 设 f 是有两个相异重点 a, b 的射影变换;证明 $\{k, 1/k\}$, 其中 $k=[a, b, m, f(m)]$ $\forall m$, 只依赖于 f 而与 a, b 的次序

无关. 若 f 的矩阵是 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, 证明 $\{k, 1/k\}$ 是下列方程的根:

$$(ad-bc)k^2-(a^2+2bc+d^2)k+(ad-bc)=0.$$

6.8.8 在 6.8.7 的题设条件中再加上 $K=\mathbf{C}$. 若复数 k (或 $1/k$) 的模是 1, 则称 f 是**椭圆型**的, 若 k 是正实数, 则称 f 是**双曲型**的, 在其它情形下称 f 是**斜驶型**的. 证明: 若将 $M(f)$ 法化, 即置 $ad-bc=1$, 则由 f 的迹 $=a+d$, 可将上述三种情形分别表述为

f 是椭圆型 $\Longleftrightarrow a+d$ 是实数且 $|a+d|<2$,

f 是双曲型 $\Longleftrightarrow a+d$ 是实数且 $|a+d|>2$,

f 是斜驶型 $\Longleftrightarrow a+d$ 不是实数.

在三种情形下,分别讨论 f^n ($n\in\mathbf{Z}$) 的性态.

为了说明"斜驶"这个词的由来,以后将证明在 Riemann 球面 $\mathbf{C}\cup\infty$ 上同一点 z 处, $f^n(z)$ 都属于该球面的一条斜驶线 (参见 18.1.8.2 和 18.11.3).

6.8.9 设 f 是 $\mathbf{C}\cup\infty$ 的射影变换; 证明: 设 f 的矩阵为 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, 则 f 使上半平面 $H=\{z\in\mathbf{C}:\mathrm{Im}(z)>0\}$ 稳定的充要条件是 a, b, c, d 都是实数而且 $ad-bc>0$. 作为 6.8.8 的特例, 在这种情形下讨论 f 以及 f^n 的不动点的性态. 证明: 若 f 和 g 都使 H 不动, 而且可交换, 则它们必有相同的不动点.

6.8.10 沿用 6.3.2 的记号. 证明 $\{4\}$ 的稳定群同构于 $\mathfrak{S}_3$, 而且当 $K\neq F_4$ 时这个稳定群的作用是一意的.

6.8.11 设 $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$ 是 $\mathbf{C}$ 上的四次方程. a, b, c, d 满足什么条件时这个方程四个根的交比在 $\{-j, -j^2\}$ 中(参见 6.3.2 (ii))? 若要四根成调和分割, 条件又如何? (结论相当复杂.) 最后, 将四根交比的六个值都写成 a, b, c, d, e 的函数(非常繁复; 参见 [DX], 第 43—51 页).

6.8.12 **Ricatti 方程.** 对连续函数 $a, b, c:[\alpha, \beta]\to\mathbf{R}$, 考虑称为 Ricatti 方程的下列微分方程:

$$y'(t) = a(t)y^2 + b(t)y + c(t);$$

证明这个方程的四个根 $y_i(i = 1, 2, 3, 4)$ 的交比 $[y_i(t)]$ 与 t 无关。

6.8.13 设K是非交换的，E是K上的二维向量空间，a, b, c, d是射影直线 $P(E)$ 上相异四点。若存在 $u, v \in E$ 使 $a = p(u)$，$b = p(v)$，$c = p(u + v)$，$d = p(\xi u + v)$，则称这样的 $\xi \in K$ 的集合为 (a, b, c, d) 的交比，记为 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$。证明 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 是交换群 K^* 的元素(关于内自同构)的共轭元素的集合。叙述并证明逆命题。讨论这两个命题与本章中关于交比的内容的联系。

6.8.14 设K是紧凸集，从而边界点集是由有限维实仿射空间的端点组成的，而且内部非空。定义函数 $d:\mathring{K} \times \mathring{K} \to \mathbf{R}$ 如下：$d(m,m) = 0 \quad \forall m \in \mathring{K}$，当 $m \neq n$ 且 $m, n \in \mathring{K}$ 时

$$d(m, n) = \frac{1}{2}|\log([m, n, \alpha, \beta])|,$$

其中 α, β 表示直线 m, n 与K的边界的两个交点。证明 d 是定义好的，并使 $\mathring{K}$ 成为度量空间。证明：只要 $m, n \in \mathring{K}$，总存在唯一的一条从m到n的最短路径，即线段 $[m, n]$ (参见 9.9.5)。

6.8.15 讨论非交换的体上的射影直线的射影变换。

6.8.16 证明$\mathbf{C} \cup \infty$ 中任何使单位圆盘 $D = \{z \in \mathbf{C}: |z| \leqslant 1\}$ 整体稳定的射影变换都有下述形式：

$$z \longmapsto e^{i\theta} \frac{z + z_0}{1 + \bar{z}_0 z}$$

(θ 是实数，$|z_0| < 1$)；证明这些射影变换所成的群在 $\mathring{D}$ 上双重可迁(参见 1.4.5)且保持 6.8.14 中定义的 $\mathring{D}$ 上的距离。试与 19.6.9 比较。

6.8.17 设 $(a_i)_{i=1,\cdots,5}$ 是射影平面上相异五点，其中前四点构成射影标架。记直线 $\langle a_i, a_j \rangle$ 为 d_{ij}。证明恒有

$$[d_{12}, d_{13}, d_{14}, d_{15}][d_{23}, d_{21}, d_{24}, d_{25}][d_{31}, d_{32}, d_{34}, d_{35}] = 1.$$

证明：存在射影变换将 $(a_i)_{i=1,\cdots,5}$ 变到 $(a'_i)_{i=1,\cdots,5}$ 的充要条

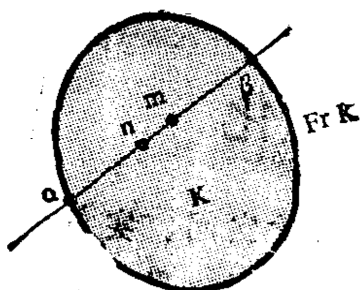


图 6.8.14.

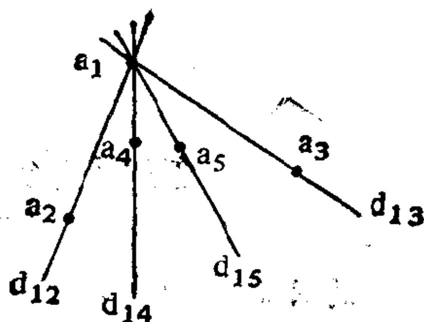


图 6.8.17.

件是下列两式成立:

$$[d_{12}, d_{13}, d_{14}, d_{15}] = [d'_{12}, d'_{13}, d'_{14}, d'_{15}],$$

$$[d_{23}, d_{21}, d_{24}, d_{25}] = [d'_{23}, d'_{21}, d'_{24}, d'_{25}],$$

其中 $d'_{ij} = \langle a'_i, a'_j \rangle$. 推广到任意有限维射影空间的情形.

6.8.18 讨论非交换体情形下的调和分割概念. 这时 6.4.10 会变成怎样?

6.8.19 为什么在图 6.4.8 中没有画出 c 点?

6.8.20 **直纹面**. 设 S 是 $\mathbf{R}^3$ 的一个直纹面, 即 $\mathbf{R}^3$ 中一族以 t 为参数 (t 取遍 $\mathbf{R}$ 的开区间 I) 的直线的并集 $\bigcup_{t\in I} D(t)$. 假设在 $D(t_0)$ ($t_0 \in I$) 的每点 m 处,曲面 S 是 $\mathbf{R}^3$ 的微分子流形,并记 m 处的切平面为 $T(m)$; 证明 $m \longmapsto T(m)$ 是射影变换或常映射. 试与 14.4.4 比较.

6.8.21 设 $\mathscr{C}$ 是三维射影空间中的一个四面体, D 是一条直线. 证明 D 与 $\mathscr{C}$ 的各面的四个交点的交比等于分别经过 D 和 $\mathscr{C}$ 的各顶点的四个平面的交比.

6.8.22 见练习 14.8.16.

第7章 复 化

本章的目的是以内在的方式定义实向量空间、实射影空间和实仿射空间的复化空间。然后讨论仿射和射影映射以及子空间的复化问题。最后证明（第7.6节），从一个实仿射空间出发，先将它射影完备化，再将这个射影空间复化，跟先将它复化再将复仿射空间射影完备化是一回事。在以内在的方式引进欧氏仿射空间的虚圆点概念时，将要用到上面的结果（参见9.5.5）。

只要知道X的泛向量空间$\hat{X}$（第3章和第5章）的存在，在我们的论述中就不会有什么实质性的困难；但因这种构造性的论证很冗长，在引言中先作了一番很初等、很简捷、但并非内在的概述。

i 表示 $\mathbf{C}$ 的点 $(0,1)$。

7.0 引 言

7.0.1 我们需要复化各种不同的对象，举例来说：复化实向量空间及其自同态，以找出特征平面（7.4.3），复化欧氏空间及定义这些欧氏空间的二次形式，以得到迷向元素并找出相似性的特点（8.8.6.4），复化射影空间，以得到虚圆点（9.5.5）。这里要用到数学上的一个基本原理：正如 Hadamard 所说的，“两个实的情形的结论之间的最短路径往往要经由复的情形.”

7.0.2 一种最简单的，对于本书亦已敷用的做法如下：若要复化有限n维向量空间E，先取E的一个基，并通过

$$E \ni x = (x_1, \cdots, x_n) \longmapsto (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbf{C}^n$$

将E嵌入$\mathbf{C}^n$，其中x_i是x在所取基下的坐标。对有限n维的实仿射空间，做法也是一样的：先取仿射标架，再在$\mathbf{C}^n$上引进自

然的仿射结构（参见 2.2.1）. 若要复化欧氏空间并同时复化定义该欧氏空间的二次形式，则可如上所述地取基并作嵌入 $E \to \mathbf{C}^n$，如果原来的二次形式在所取基下表为 $\sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j$，现在就在 $\mathbf{C}^n$ 上引进二次形式 $\sum_{ij} a_{ij} z_i z_j \ \forall (z_1, \cdots, z_n) \in \mathbf{C}^n$. 至于复化实射影空间，则可从定义该射影空间的向量空间的复化向量空间出发，以得出复化的射影空间.

最后，我们所要遇到的最复杂的情形是：X 是实仿射空间，$\widetilde{X}$ 是它的射影完备化空间（参见 5.1），而我们要同时复化 X 和 $\widetilde{X}$，使所得的复射影空间是所得的复仿射空间的射影完备化空间. 不过，取 X 的仿射标架后，这问题不难解决；沿用 5.0.2 的记号，我们将 X 在 $\mathbf{C}^n$ 中复化，并作嵌入 $X \to \mathbf{C}^n$ 如 7.0.2. X 的射影完备化空间 $\widetilde{X}$ 等同于 $P^n(\mathbf{C})$，嵌入 $X \to P^n(\mathbf{R})$ 则是

$$(x_1, \cdots, x_n) \longmapsto (x_1, \cdots, x_n, 1).$$

但 $P^n(\mathbf{R})$ 的复化空间自然是 $P^n(\mathbf{C})$，因为 $P^n(\mathbf{R}) \subset P^n(\mathbf{C})$ 显然是一个包含关系；这样，由 $(z_1, \cdots, z_n) \longmapsto p(z_1, \cdots, z_n, 1)$ 给出的嵌入 $\mathbf{C}^n \to P^n(\mathbf{C})$，就是从 $\mathbf{C}^n$ 到它的射影完备化空间的嵌入（$\mathbf{C}^n$ 是复仿射空间），因而下图是交换的：

7.0.2.1

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & \widetilde{X} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{C}^n & \longrightarrow & P^n(\mathbf{C}), \end{array}$$

其中竖箭头表示复化，横箭头表示射影完备化.

7.0.3 上面的做法对本书来说已经够用. 不过，7.0.2 中的构造过程有一个根本的缺陷，就是作为前提地涉及到了坐标的选取；这种美中不足或许可以说成有违于数学思维上的探索精神、形式上的完美典雅和构造上的内在性要求. 这个问题并非自今日始；关于 7.0.2 的构造，围绕着“Poncelet 连续性原理”，在历史上引起过长久的论战. 下面摘引两段文字. 第一段引自 [GX]，第 72 页，是阐述上述原理的：“假想有一个由点、直线和曲线组成的图形 F，并假定图形 F 通过连续变形改变位置. 假定在这个图形到达的

某个位置 F' 处，它的某些元素成为虚元素，那么，原先运用这些元素建立起来但与这些元素本身无关的 F 的性质在 F' 中仍保持。”这一原理涉及代数几何，已超出复化空间的讨论范围，而我们在这里摘引它，一方面是由于它在历史上的作用，另一方面则是因为它与 7.0.2 有某些联系。第二段引文摘自[DX]，第 15 页，原书写于在几何中刚开始使用复数到用内在方式进行复化的过渡时期："然而，在此先回答一种反对意见是不无裨益的，这种意见是由 Von Staudt 对复数的解析理论提出的，但同样也适用于上文阐述的内容。这位博学的几何学家声称，虚点(如同我们所定义过的)可以说只是一种依赖于坐标轴的存在。这种责难可以针对用到这样的轴的一切讨论。为了回答这种责难，只须证明当一个虚点属于一个或几个曲面时，坐标改变后它仍属于这些曲面。如果对实点已证妥的坐标变换公式对虚点和无穷远点仍适用的话，上述结论就是不言而喻的了。”

7.0.4 于是，一种折衷的办法是：用 7.0.2，但在每一步，只要有必要，都验证一下在复化空间所讨论的对象只与原空间的这些对象有关，而与所取的基无关。举例来说，在同时复化一个欧氏向量空间及其二次形式时，我们可以验证复化空间的迷向锥只与这个欧氏结构有关。

7.0.5 以上的分析说明，对 7.0.2 所说的构造给出一种内在的表述是不无好处的；这正是这一章的目标。但是，为了得到那点裨益，最终要花费相当大的代价；正因如此，我们一则在 7.0.2 就具体说明了复化的结构（不是内在的，但很清楚），二则将本章写得很简约。第一，未给出非关键的证明的细节，有些内容的阐述也很简略。第二，为了写起来方便，读起来又不费神，我们只定义具体的规范复化，而没定义更好的(然而代价也更高的)复化概念(定义这个概念必须证明在不计同构差别情形下的存在性和唯一性)。关于这种漂亮的定义方法，可见 [FL]，第 144—155 页。

7.0.6 **附注**．读者可能会想，复化的概念是否还能推广呢？对此，例如可参阅 [GN]，第 IV 章中关于**二次扩张**的内容(扩张 $\mathbf{C}\supset\mathbf{R}$

的推广).

7.1 实向量空间的复化

复化一个实向量空间，就是将它嵌入到一个尽可能小的复向量空间中去，就象将 **R** 嵌入 **C** 那样. 现在给出一种很自然的复化定义:

7.1.1 定义. 设 E 是实向量空间，E 的复化空间，记为 E^C，就是带有下述 **C** 上向量空间结构的乘积空间 $E \times E$:

$$(x,y)+(x',y')=(x+x',y+y'),$$

$$(\lambda+i\mu)(x,y)=(\lambda x-\mu y,\ \lambda y+\mu x).$$

我们通过 $x\longmapsto(x,0)$ 将 E 嵌入 E^C. E^C 到自身中的对合映射

$$\sigma:(x,y)\longmapsto(x,-y)$$

称为 E^C 中的共轭映射. 我们有

$$E=\mathrm{Ker}(\sigma-\mathrm{Id}_{E^C})=\{z\in E^C:\sigma(z)=z\}.$$

7.1.2 注

7.1.2.1 共轭映射 σ 是半线性的: $\sigma(\lambda z)=\bar{\lambda}\sigma(z)$.

7.1.2.2 有了7.1.1之后，我们看到 $i(y,0)=(0,y)\cong iy$，因此可以写 $(x,y)=x+iy$ 和 $E^C=E\oplus iE$ (实直和); 从而

$$\sigma(x+iy)=x-iy,$$

这就说明了它何以叫共轭映射.

7.1.2.3 复化空间的其它定义例如有:

$$E^C=L_{\mathbf{R}}(\mathbf{C};E)=\{f:\mathbf{C}\to E,\ f\text{ 在 }\mathbf{R}\text{ 上线性}\},$$

$$E^C=E\otimes_{\mathbf{R}}\mathbf{C}.$$

一般的定义请参阅 [FL], 第 146 页.

7.1.3 基. 设 $\{e_s\}_{s=1,\cdots,n}$ 是 E 的一个基; 则 $\{e_s\}\subset E^C$ 仍是 E^C 的一个 **C** 上(而不是 **R** 上!)的基. 这就递推地证实了 7.0.2 中的构造的合理性. 反过来，若 $\{e'_s\}_{s=1,\cdots,n}$ 是 E^C 的任何一个 (**C** 上的)基，则关键所在是: $2n$ 个向量

$$\{e'_s + \sigma(e'_s)\} \cup \left\{\frac{1}{i}(e'_s - \sigma(e'_s))\right\}$$

都在 E 中,因为它们在 σ 下不变;因而这 $2n$ 个向量可取作 E 的一个 $\mathbf{R}$-基。

7.2 $\bullet^C$ 的函子性质或态射的复化

7.2.1 命题. 设 E, E' 是两个实向量空间, $f \in L(E;E')$, 则唯一地存在 $f^C \in L_{\mathbf{C}}(E^C; E'^C)$ 使 $f^C|_E = f$. 而且对 E 和 E' 中的共轭映射 σ 有 $\sigma \circ f^C = f^C \circ \sigma$. 最后, $\bullet^C$ 是有函子性质的,即

$$(\mathrm{Id}_E)^C = \mathrm{Id}_{E^C},$$

而且若 $f \in L(E;E')$, $g \in L(E';E'')$, 则 $(g \circ f)^C = g^C \circ f^C$.

证明 7.2.1,只须注意到 f^C 必为:

$\forall x, y \in E$,

$f^C(x + iy) = f(x) + if(y)$ (参见 7.1.2.2).

$$\begin{array}{ccc} E^C & \xrightarrow{f^C} & E'^C \\ \sigma \downarrow & & \downarrow \sigma \\ E^C & \xrightarrow[f]{} & E'^C \end{array}$$

7.2.2 若 $M(f)$ 是 f 在 E 和 E' 的两个基下的转移矩阵,则在这两个基被看作 E^C 和 E'^C 的基时(参见 7.1.3), $M(f^C) = M(f)$.

7.3 多项式的复化

7.3.1 命题. 设 $\varphi: E \times \cdots \times E \to \mathbf{R}$ 是一个实向量空间 E 上的 k 重线性映射,则存在唯一的($\mathbf{C}$ 上的) k 重线性映射

$$\varphi^C: E^C \times \cdots \times E^C \to \mathbf{C}$$

使 $\varphi^C|_{E\times\cdots\times E} = \varphi$. 而且,当 φ 对称时, φ^C 也对称.

φ^C 应为:

7.3.2 $\varphi^C(x_1 + iy_1, \cdots, x_k + iy_k) = \sum_P i^{\# P} \varphi(X_1^P, \cdots, X_k^P)$,

其中 P 取遍 $\{1, 2, \cdots, k\}$ 的 2^k 个子集，$\# P$ 表示 P 的基数，X_s^P 在 $s \in P$ 时等于 x_s，在 $s \notin P$ 时等于 y_s. 可验证 φ^C 满足命题要求.

7.3.3 例. $k = 2$ 时，

$$\varphi^C(x + iy, x' + iy') = \varphi(x, x') - \varphi(y, y') + i(\varphi(x, y') + \varphi(x', y)).$$

7.3.4 命题. 若 $f \in \mathscr{P}_k(E)$；则存在唯一的 $f^C \in \mathscr{P}(E^C)$ 使

$$f^C|_E = f.$$

由 3.3.1，我们可以假定 f 是 k 次齐次的；因而可设 $f = \varphi \circ \Delta$，其中 $\varphi: E^k \to \mathbf{R}$ 是多重线性、对称的. 令 $f^C = \varphi^C \circ \Delta^C$，其中 φ^C 是 7.3.1 中的映射，$\Delta^C: E^C \to E^C \times \cdots \times E^C$ 是对角映射，则 f^C 满足命题要求；而且它是唯一的，因为根据 3.3.1 的唯一性和 7.3.1 的唯一性，φ^C 是完全确定的.

7.3.5 要在 E 的一个基下将 f^C 写成坐标形式，只须在 3.3.3 的两个表达式中将实数 λ_s 换成复数.

7.4 子空间与复化

7.4.1 命题. 设 E 是实向量空间，F 是 E 的向量子空间，则由 E^C 的子集 F 所生成的 E^C 的（$\mathbf{C}$ 上的）向量子空间为

$$F^C = F + iF = \{x + iy: x, y \in F\};$$

称之为 F（在 E^C 中)的复化空间. 我们有 $\sigma(F^C) = F^C$. 反过来，若 $S \subset E^C$ 是 E^C 的(复)向量子空间且使 $\sigma(S) = S$，则 $S \cap E$ 是 E 的(实)向量子空间，其实维数 $\dim_{\mathbf{R}}(S \cap E)$ 等于 S 的复维数 $\dim_{\mathbf{C}} S$；而且 $S = (S \cap E)^C$.

仅逆命题部分不很显然. 我们有：$S \cap E$ 是 E 的向量子空间，$(S \cap E)^C \subset S$；为证由 $\sigma(S) = S$ 推出 $(S \cap E)^C = S$，只须用到 7.1.3 中的思想：对任一 $x \in S$，$x + \sigma(x)$ 和 $(1/i)(x - \sigma(x))$ 都在 $S \cap E$ 中. 而

$$x = \frac{1}{2}\left[(x+\sigma(x)) + i\left(\frac{1}{i}(x-\sigma(x))\right)\right]$$
$$\in (S\cap E) + i(S\cap E) = (S\cap E)^C.$$

7.4.2 附注. 首先,很难作出图形来,因为最起码的非平凡情形是 $\dim_{\mathbf{C}} S = 1$, $\dim_{\mathbf{C}} E = 2$, 因而 $\dim_{\mathbf{R}} E = 4$! 其次, $\sigma(S) \neq S$ 时 7.4.1 不成立;例如在 $E = \mathbf{R}^2$, $E^C = \mathbf{C}^2$ 时取

$$S = \{(z, iz) : z \in \mathbf{C}\};$$

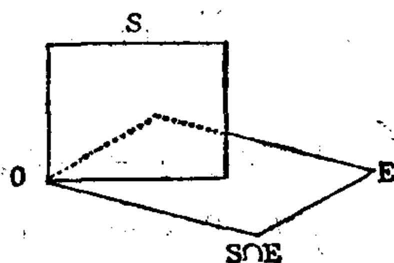


图 7.4.2.

就有 $S\cap \mathbf{R}^2 = 0$, 因此 $(S\cap E)^C = 0$!

以后我们会看到 σ (参见 7.1.1, 7.2.1 和 7.4.1) 的系统的应用;总的原则是对 E^C 经常要想到用共轭映射 σ.事实上可以证明,给定 E^C 和 σ, 与给定 E 和 E^C 是等价的: 参见 [FL], 第 146 页,其中以此作为复化空间的定义.

7.4.3 推论. 设 $f \in L(E; E)$ 是有限维实向量空间中的一个自同态;则至少存在一个关于 f 的特征向量子空间 P,即 $f(P)\subset P$, 且其维数为 1 或 2.

设 V 是 E^C 的关于 E^C 中自同态 f^C 的一条特征直线,相应的特征值是 λ;则 $\sigma(V)$ 是一条相应于 $\bar\lambda$ 的特征直线(参见 7.1.2.1),因而复向量子空间 $S = V + \sigma(V)$ 在 σ 下稳定(且维数为 1 或 2). 推论中的 E 的子空间就是 $E\cap S$.

7.4.4 推论 7.4.3 是复自同态的特征向量存在性命题在实的情形下的说法,它有很广泛的应用: 参见 8.2.15, 13.5.

7.5 射影空间的复化

7.5.1 定义. 设 $\mathscr{P} = P(E)$ 是实射影空间; $\mathscr{P}$ 的复化空间 $\mathscr{P}^C$ 就是复射影空间 $\mathscr{P}^C = P(E^C)$. 在包含映射 $E\backslash 0 \to E^C\backslash 0$ 所诱导的商空间的映射下,我们把 $\mathscr{P}$ 等同于 $\mathscr{P}^C$ 的一个子集. $\mathscr{P}^C$ 中的共轭映射 σ,就是 σ: $E^C\backslash 0 \to E^C\backslash 0$ 在商空间所诱导的映射

$$\mathscr{P}^C \to \mathscr{P}^C.$$

7.5.2 我们注意到，$\mathscr{P}$ 不是 $\mathscr{P}^C$ 的射影子空间，正如 E 不是 E^C 的(复)向量子空间一样．同时也注意到，$\sigma: \mathscr{P}^C \to \mathscr{P}^C$ 保持几点共线的性质，事实上 σ 是一个半射影映射，参见 5.4.8．最后，($\mathbf{R}$ 上的) $\mathscr{P}$ 和($\mathbf{C}$ 上的) $\mathscr{P}^C$ 的维数相同，正如 E 和 E^C 的情形一样．

7.5.3 命题． 对任一 $f \in \mathrm{GP}(E)$ (E 是向量空间)，存在唯一的 $f^C \in \mathrm{GP}(E^C)$，使 $f^C|_{P(E)} = f$.

7.5.4 命题． 设 $\mathscr{P}$ 是实射影空间，$S \subset \mathscr{P}$ 是一个射影子空间，则 $\mathscr{P}^C$ 中由 $\mathscr{P}^C$ 的子集 S 所生成的(复)射影子空间 S^C 满足

$$\sigma(S^C) = S^C, \quad S = S^C \cap \mathscr{P},$$

并称为 S (在 $\mathscr{P}^C$ 中)的复化空间．反过来，设 T 是 $\mathscr{P}^C$ 的复射影子空间且使 $\sigma(T) = T$，则 $T \cap \mathscr{P}$ 是 $\mathscr{P}$ 的(实)射影子空间，其维数等于 T 的复维数，而且 $(T \cap \mathscr{P})^C = T$.

7.5.5 具体计算． 利用在 E 的基或 $P(E)$ 的射影标架下的齐次坐标，即可进行计算；这种基或标架仍是 E^C 的基或 $P(E^C)$ 的(复)射影标架，只须将实坐标换成复坐标就可以了（这证实了 7.0.2 的合理性．）

7.6 仿射空间的复化

7.6.1 设 $(X, \vec{X})$ 是实仿射空间；将 X 嵌入泛向量空间 $\hat{X}$ 并考察包含关系 $X \subset \hat{X} \subset (\hat{X})^C$，其中 $\hat{X}^C$ 表示实向量空间 $\hat{X}$ 的复化．我们记得（参见 3.1.7）：$X = M^{-1}(1)$，其中 M 是 $\hat{X}$ 上的线性形式．根据 7.2.1，存在一个线性形式 $\hat{X}^C \to \mathbf{C}$ 是 $M: \hat{X} \to \mathbf{R}$ 的复化，记之为 M^C，它是定义好的(参见 7.2.1)；最后，令

$$X^C = (M^C)^{-1}(1) \subset \hat{X}^C.$$

这个 X^C 是复仿射空间 $\hat{X}^C$ (取自然结构，参见 2.2.1)的(复)仿射超平面，因而是复仿射空间．

7.6.2 定义．命题． 作为定义，实仿射空间 X 的复化空间就是复

仿射空间 $X^C = (M^C)^{-1}(1)$. X^C的底空间是 $\overrightarrow{X^C} = \vec{X}^C$ 且很自然地有 $X \subset X^C$. 而且 X^C 的共轭映射 σ 使 X^C 不动: $\sigma(X^C) = X^C$, $X = \{z \in X^C : \sigma(z) = z\}$. σ 在 X^C 上的限制仍记为 σ 并称为 X^C 的**共轭映射**. 对任一点 $a \in X$ 处的向量化空间,有 $(X^C)_a = (X_a)^C$; 且有自然同构 $(\hat{X})^C = \widehat{(X^C)}$. X^C 的底向量空间是 $(M^C)^{-1}(0)$,由于 $M^{-1}(0) = \vec{X}$, 上面的空间就是 $\vec{X}^C$. 另外由 7.2.1 有

$$\sigma(X^C) = \sigma((M^C)^{-1}(1)) = (M^C)^{-1}(\sigma(1)) = (M^C)^{-1}(1) = X^C.$$

而且 $\sigma(z) = z$, $z \in X^C$ 等价于 $z \in X^C \cap \hat{X} = X$. 等式 $(X^C)_a = (X_a)^C$ 可由 3.1.7 最后一段推出. 关于同构 $(\hat{X})^C \cong \widehat{(X^C)}$, 只须注意泛空间 $\hat{\bullet}$ 的定义.

7.6.3 命题. 设 X, X' 是两个实仿射空间, $f \in A(X; X')$ 是仿射映射,则存在唯一的 $f^C \in A_C(X^C; X'^C)$ 使 $f^C|_X = f$. 这个 f^C 称为 f 的**复化**. 而且, $\sigma \circ f^C = f^C \circ \sigma$.

对向量化空间 X_a 和 $X'_{f(a)}$ 用 7.2.1 并利用 7.6.2 的最后部分, 即得命题.

7.6.4 对实仿射空间 X 及其复化空间 X^C 和共轭映射 σ,也有关于 X 的仿射子空间的跟 7.4.1 相似的结论. 而且关于方向有:

$$\vec{S}^C = \overrightarrow{S^C}.$$

7.6.5 同样,我们将 7.3 推广到 X 上的多项式;这只要用到 3.3.14, 7.6.2 和 7.3.4.

7.6.6 现在我们可以转到讨论 7.0.2 的结构和 7.0.2.1 的图了, 它们是本章的主要目标,而且在 9.5.5 和第 17 章中将被广泛地应用. 设 X 是实仿射空间,其射影完备化空间(参见第 5 章)为

$$\tilde{X} = P(\hat{X}) = X \cup P(\vec{X}) = X \cup \infty_X;$$

作出 X^C, $\hat{X}^C$ 以及实射影空间 $P(\hat{X}) = \tilde{X}$ 的复化射影空间 $(\tilde{X})^C = P(\hat{X}^C)$. 于是在 $(\tilde{X})^C$ 中有实子空间 ∞_X 的复化空间, 即 ∞_X^C (参见 7.5.4). 我们有包含关系 $X^C \subset P(\hat{X}^C) = (\tilde{X})^C$; 于是:

7.6.7 引理. $X^C = (\tilde{X})^C \backslash \infty_X^C$.

事实上，$\infty_X = P(\vec{X})$，因此 $\infty_X^C = P((\vec{X})^C)$，而 $\overrightarrow{(X^C)} = (\vec{X})^C$ (参见 7.6.4).

7.6.8 命题. 包含映射 $X^C \subset P(\hat{X}^C) = (\tilde{X})^C$ 等同于 X^C 到其(复)射影完备化空间中的自然包含映射. 因而 $(\tilde{X})^C = \widetilde{(X^C)}$.

7.6.9 若 $f \in GA(X)$，则存在唯一的 $\tilde{f}^C \in GP_{\tilde{X}^C}(X^C)$ 使

$$\tilde{f}^C|_{X^C} = f^C.$$

用 5.2.2 即可得证.

7.6.10 关于子空间可有相应的结论.

7.6.11 用命题 7.6.8 可递推地证实 7.0.2 中的构造和交换图.

7.7 练　　习

7.7.1 写出并证明 7.2.1 中公式 $\sigma \circ f^C = f^C \circ \sigma$ 的逆命题.

7.7.2 对 $f \in L(E;E')$，讨论是否存在一个嵌入 $\bar{f}: E^C \to E'^C$，使得 $\bar{f}$ 关于 $\mathbf{C}$ 的自同构 (共轭映射)是半线性的(参见 2.6.2).

7.7.3 讨论 7.5.3 如何推广到任意的射影映射

$$f \in M(P(E); P(E')).$$

7.7.4 写出 7.6.4, 7.6.5 和 7.6.10 的细节.

7.7.5 证明张量积 $E \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$ 是 E 的自然复化空间; $\mathrm{Hom}_{\mathbf{R}}(\mathbf{C}; E)$ 亦然.

补 充 图 形



图 170.1.

两种母鸡：它们可以拼满平面，但拼嵌方式不可能是周期性的（见 1.9.16）。





.8.3.2

图 170.2.



图 171.

Charles Dupin 男爵,《美术与工艺美术中的几何与力学》, Bachelier, 1825 年.

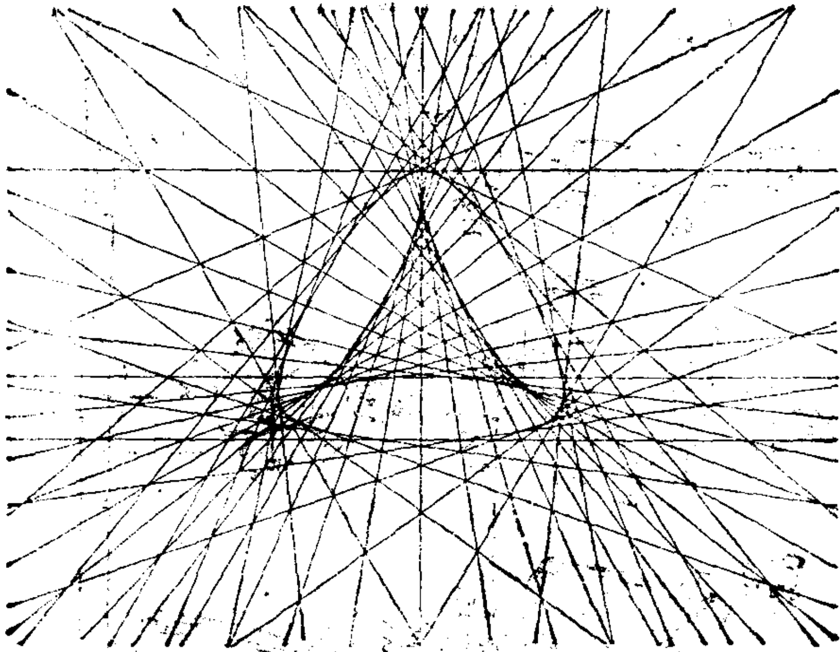


图 172.1.

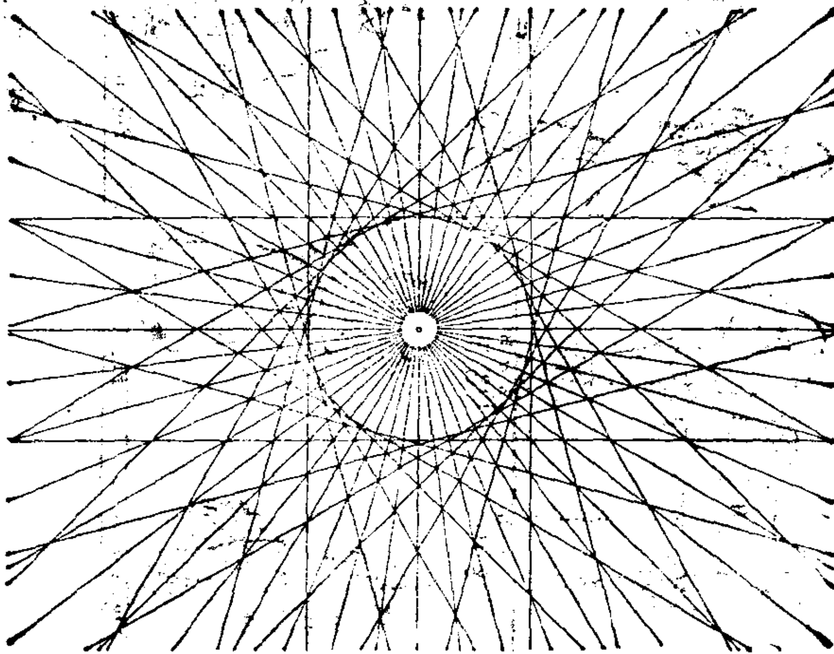
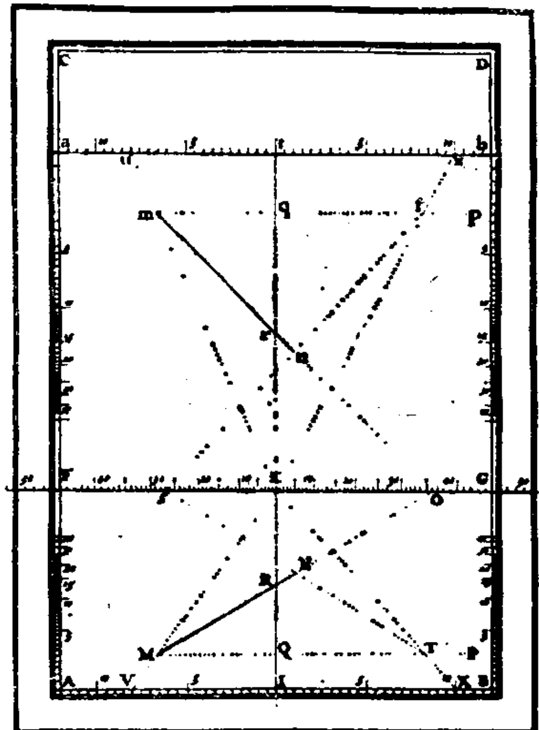


图 172.2.

LA
PERSPECTIVE
SPECVLATIVE
ET
PRATIQVE
OV SONT DEMONSTREZ LES FONDEMENS
de cet Art, & de tout ce qui en a esté enseigné
jusqu'à present.
Ensemble la maniere vniverselle de la pratiquer, non seulement
sans Plan Geometral, & sans Tiers poinct, dedans
ni dehors le champ du Tableau.
Mais encores par le moyen de la Ligne, communément
appellée Horisontale.
De l'invention du feu Sieur ALEAVME, Ingenieur du ROY.
MISE AV IOVR
Par ESTIENNE MIGON, Professeur és Mathematiques.

A PARIS,
Chez MELCHIOR TAVERNIER, Hydrographe, Graveur, & Imprimeur du Roy, pour les Cartes Geographiques, & autres Tailles douces, sur le Quay qui regarde la Megisserie, à la Sphere.
ET
Chez FRANCOIS LANGLOIS, dit CHARTRES, en la rue Sainct Iacques, aux Colonnes d'Hercules, proche le Lion d'Argent.
M. DC. XLIII.
AVEC PRIVILEGE DV ROY.

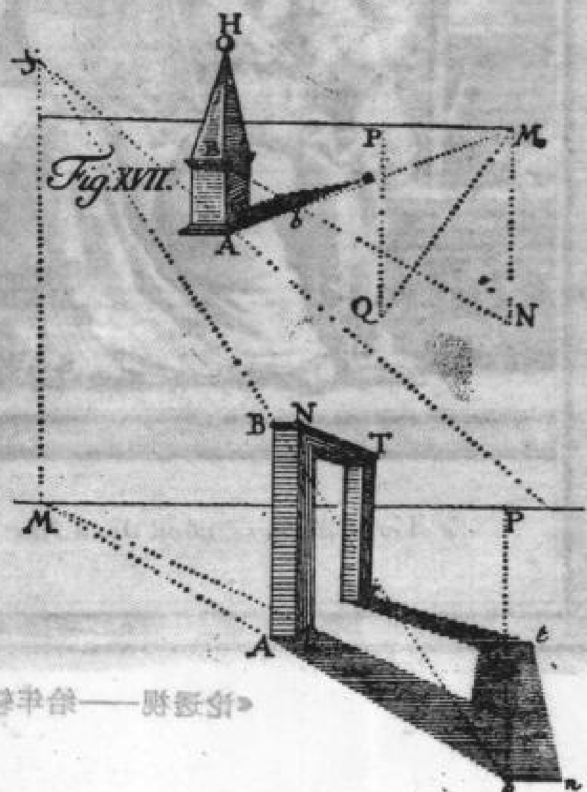


8.45 Estienne Migon

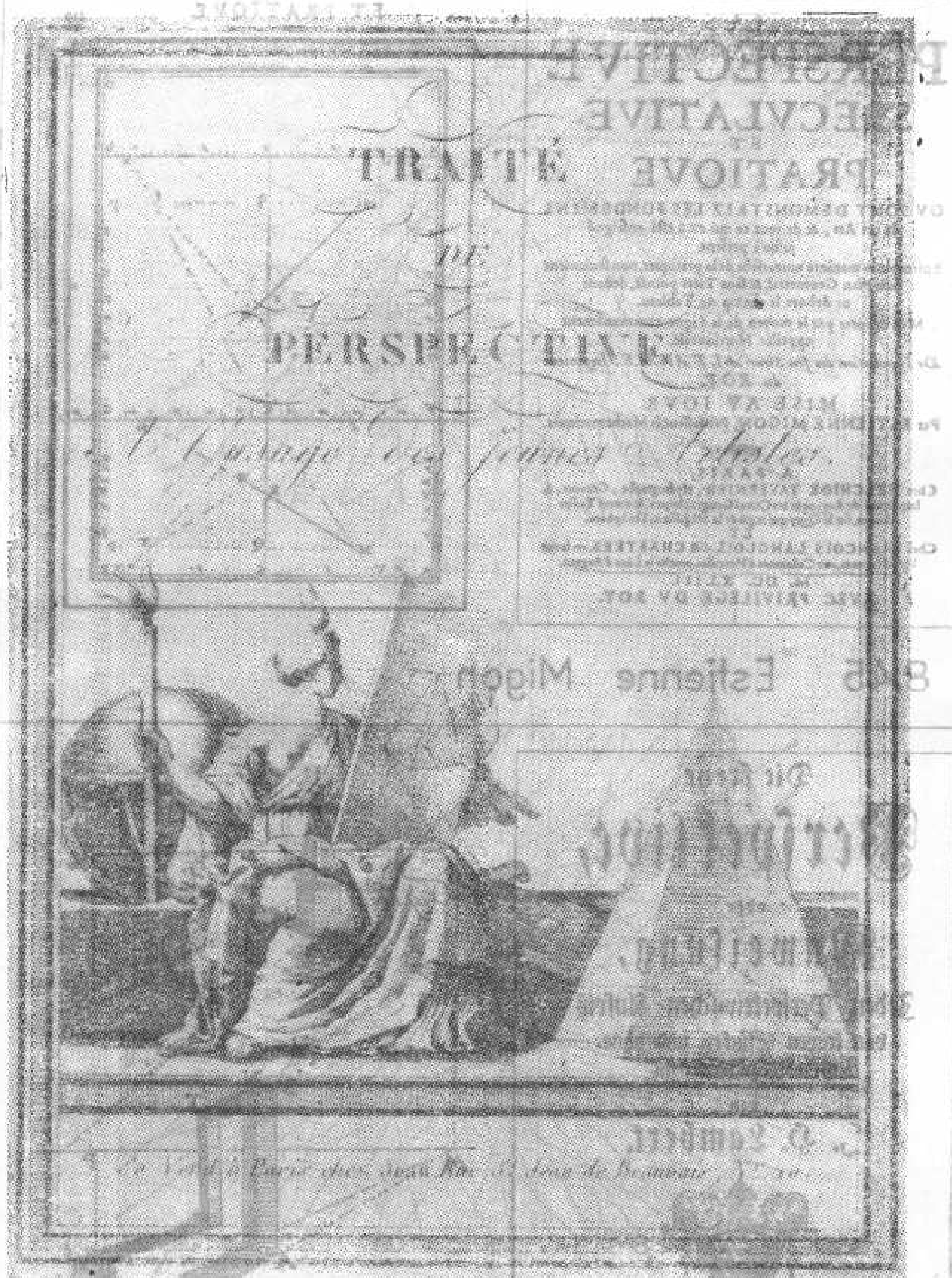
Die freye
Perspektive,
oder
Anweisung,
Jeden Perspektivischen Aufriß
von freyen Stücken und ohne
Grundriß zu verfertigen,
von
J. H. Lambert.



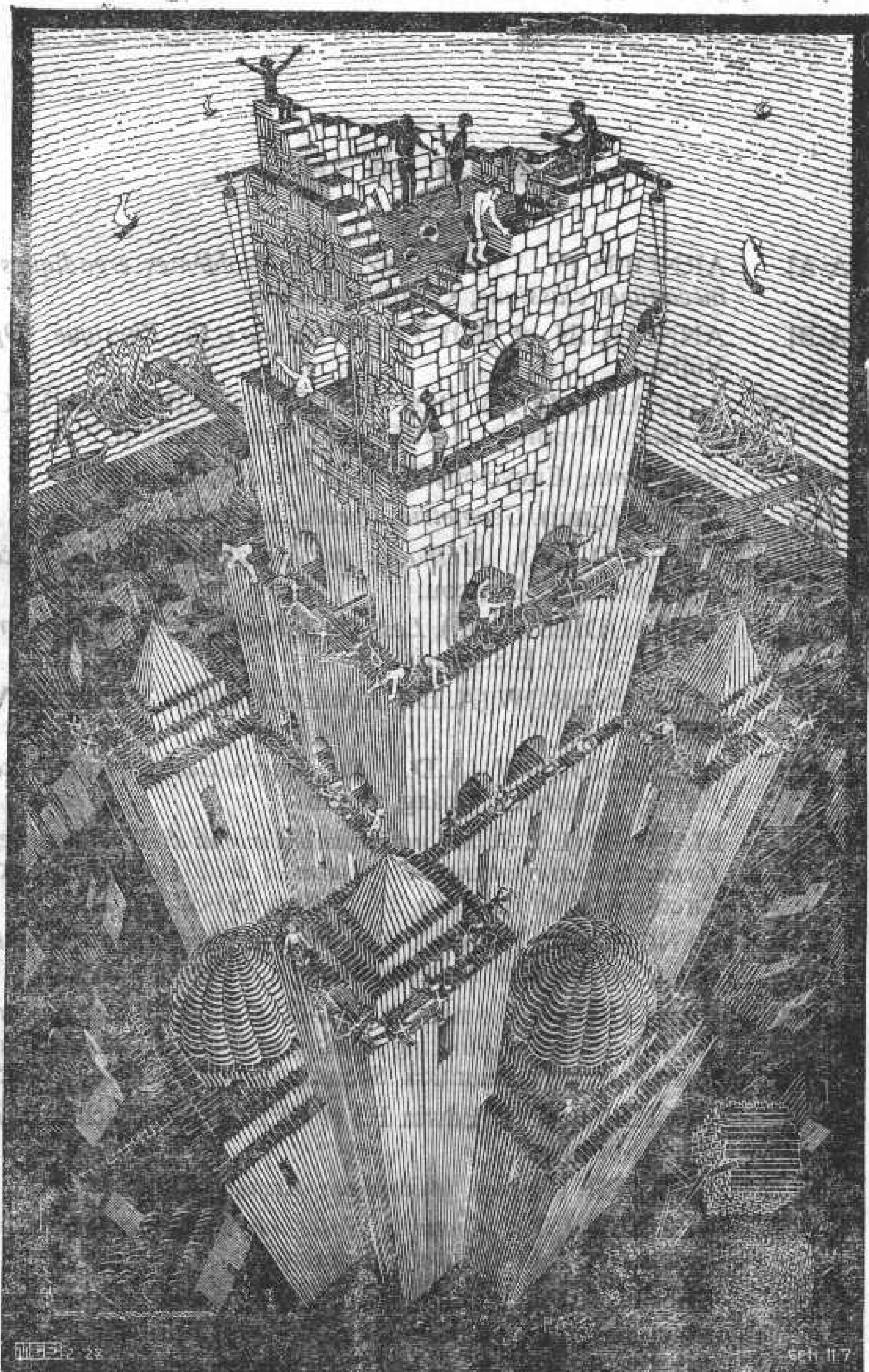
Zürich,
Bey Heidegger und Compagnie. 1759.



8.46 Johann Heinrich Lambert


TRAITÉ
de
PERSPECTIVE
à l'usage des jeunes Artistes.

《论透视——给年轻的艺术家》



M. C. Escher, "Babel 塔",木刻,1928 年;海牙 Escher 纪念馆.

参考书目

[A-A] ARNOLD (V. I.) et AVEZ (A.). *Problèmes ergodiques de la mécanique classique*, Gauthier-Villars.

[A-B] ANNEQUIN et BOUTIGNY. *Cours de Physique, Optique*, Vuibert.

[A-B-S] ATIYAH (M. F.), BOTT (R.) et SHAPIRO (A.). *Clifford Modules*, Topology, 3, 1964-1965, supplément, p. 3-38.

[AE] *Astronomie*, Encyclopédie de la Pléïade, Gallimard

[AN] ARTIN (Emil). *Geometric Algebra*, Interscience.

[AR] ARNOLD (V.). *Méthodes mathématiques de la mécanique classique*, Mir, Moscou.

[AS] ARNAUDIÈS (J.-M.), *Les cinq polyèdres de* $\mathbb{R}^3$ *et leurs groupes*, C.D.U.-S.E.D.E.S., Paris.

[AV] ALEXANDROW (A. D.). *Konvexe Polyeder*, Akademie Verlag, Berlin.

[AW] ALEXANDROW (A.D.). *Die innere Geometrie der konvexe Fläche*, Akademie Verlag, Berlin.

[BA]. BIANCHI (L.). *Sulle configurazioni mobili di Möbius nelle trasformazioni asintotiche delle curve el delle superficie*, Rend. del Circolo Mat. di Palermo, 25, 1908; p. 291-325.

[BAN] BANCHOFF (Thomas). *Non-rigidity Theorems for Tight Polyhedra*, Archiv der Mathematik, 21, 1970, p. 416-423.

[BA-WH] BANCHOFF (Thomas) et WHITE (James). *The behavior of the total twist and self-linking number of a closed space curve under inversions*, Mathematica Scandinavica 36, 1975, p. 254-262.

[B-B] BECKENBACH (Edwin F.) et BELLMAN (Richard). *Inequalities*, Springer.

[BE] BROUSSE (Pierre). *Mécanique*, Armand Colin.

[BER] BERGER (M.). *Lectures Notes on Geodesics in Riemannian Geometry*, Tata Institute, Bombay.

[BES] BESSE (Arthur). *Manifolds all of whose geodesics are closed*, Ergebnisse der Mathematik, Band 93, Springer.

[B-F] BONNESEN (O.) et FENCHEL (W.). *Theorie der konvexe Körper*, Chelsea.

[B-G] BERGER (Marcel) et GOSTIAUX (Bernard). *Géométrie différentielle*, Armand Colin.

[B-H] BOREL (A.) et HIRZEBRUCH (F.). *Characteristic Classes and Homogeneous Spaces,* American Journal of Math., 80, 1958, p. 458-538.

[B-H-H] BLACK (W. L.), HOWLAND (H. C.) et HOWLAND (B.). *A Theorem about Zigzags between two Circles,* American Math. Monthly, 81, 1974, p. 754-757.

[BI 0] BOURBAKI (Nicolas). *Eléments de mathématiques,* Théorie des Ensembles, Hermann, 1970.

[BI 1] BOURBAKI (Nicolas). *Eléments de mathématiques,* Topologie Générale, chapitres 5 à 10, Hermann, 1974.

[BI 2] BOURBAKI (Nicolas). *Eléments de mathématiques,* livre II, chapitre 9, Hermann.

[BI 3] BOURBAKI (Nicolas). *Eléments de mathématiques,* livre V, chapitres 1, 2, 2e édition, Hermann.

[BI 4] BOURBAKI (Nicolas). *Groupes et algèbre de Lie,* chapitre 4, 5, 6, Hermann.

[BI 5] BOURBAKI (Nicolas). *Eléments de mathématiques,* Algèbre, chapitres 1 à 3, Hermann, 1970.

[B-K] BUSEMANN (Herbert) et KELLY (Paul J.). *Projective Geometry and Projective Metrics,* Academic Press.

[BL] BLUMENTHAL (Leonard M.). *Theory and Applications of Distance Geometry,* Chelsea.

[BLA 1] BLASCHKE (Wilhelm). *Kreis und Kugel,* Chelsea.

[BLA 2] BLASCHKE (Wilhem). *Vorlesungen über Differential Geometrie, II : Affine Differential Geometry,* Springer.

[BLA 3] BLASCHKE (Wilhelm). *Vorlesungen über Differential Geometrie, III : Differential Geometrie der Kreise und Kugel,* Springer.

[BL-BO] BLASCHKE (W.) et BOL (G.). *Geometrie der Gewebe,* Springer, 1938.

[B-M] BLUMENTHAL (Leonard M.) et MENGER (Karl). *Studies in Geometry,* W. H. Freeman.

[BN] BOURGIN (D. G.). *Modern Algebraic Topology,* Mac Millan.

[BO 1] BOREL (Armand). *Sur l'homologie et la cohomologie des groupes de Lie compacts connexes,* American Journal of Math., 76, 1954, p. 273-342.

[BO 2] BOREL (Armand). *Sur la cohomologie des espaces fibrés principaux et des espaces homogènes de groupes de Lie compacts,* Annals of Math., 57, 1953, p. 115-207.

[BP] BAUDOIN (Paul). *Les ovales de Descartes et le limaçon de Pascal,* Vuibert.

[BR] BAER (R.). *Linear Algebra and Projective Geometry*, Academic Press.

[B-S] BOREVICH (Z. I.) et SHAFAREVICH (I. R.). *Number Theory*, Academic Press.

[B-T] BRUHAT (F.) et TITS (J.). *Groupes réductifs sur un corps local. I. Données radicielles valuées*, Public. Math. I.H.E.S., nº 41.

[BU 1] BUSEMANN (Herbert). *Convex Surfaces*, Interscience.

[BU 2] BUSEMANN (Herbert). *Recent Synthetic Differential Geometry*, Ergebnisse der Mathematik, nº 54, Springer.

[BUR] BURCKHARDT (J. J.). *Die Bewegungsgruppen der Kristallographie*, Birkhaüser.

[BV] BONNEVAL (H.). *Photogrammétrie générale* (4 *volumes*), Eyrolles.

[BZ] BENZ (Walter). *Vorlesungen über Geometrie der Algebren*, Springer.

[CA] CAIRNS (Stewart Scott). *Introductory Topology*, Ronald Press.

[CAL] CALLAHAN (Francis P.). *Morley polygons*, American Math. Monthly 84, 1977, p. 325-337.

[C-B] COUDERC (P.) et BALLICIONI (A.). *Premier livre du tétraèdre*, Gauthier-Villars.

[CD] CARATHEODORY (C.). *The most general transformation which transform circles into circles*, Bull. Amer. Math. Soc., 43, 1937, p. 573-579.

[C-D-L] COHEN-TANNOUDJI (C.), DIU (B.) et LALOE (F.). *Mécanique quantique, vol.* 1, Hermann.

[CE 1] CARTAN (Elie). *Sur les propriétés topologiques des quadriques complexes*, Oeuvres complètes, tome I, volume 2, p. 1227-1246.

[CE 2] CARTAN (Elie). *The Theory of Spinors*, Hermann ou The M.I.T. Press, Cambridge, Mass.

[C-G] CHEEGER (Jeff) et GROMOLL (Detlef). *On the Structure of Complete Manifolds of Nonnegative Curvature*, Ann. of Math., 96, 1972, p. 413-443.

[CH 1] CARTAN (Henri). *Calcul différentiel*, Hermann.

[CH 2] CARTAN (Henri). *Théorie élémentaire des fonctions d'une ou plusieurs variables complexes*, Hermann.

[CH-GR] CHERN (S. S.) et GRIFFITHS (P.). *Abel's theorem and webs*, Jahrbericht d. Deutsche Math.-Verein., 80, 1978, p. 13-110.

[CL 1] CONNELLY (Robert). *A counter example to the rigidity conjecture for polyhedra*, Public. Math. I.H.E.S., 47, 1978, p. 333-338.

[CL 2] CONNELLY (Robert). *A flexible sphere*, Math. Intelligencer, 1, 1978, p. 130-131.

[C-M] COXETER (H. S. M.) et MOSER (W. O. J.). *Generators and Relations for Discrete Groups*, 2e édition, Springer.

[CN] CUENIN (R.). *Cartographie générale (2 volumes)*, Eyrolles.

[CO] CONNELLY (Robert). *An attack on rigidity I, II*. Preprints, Cornell University.

[CR 1] COXETER (H. S. M.). *Introduction to Geometry*, John Wiley.

[CR 2] COXETER (H. S. M.). *Regular Polytopes*, Methuen.

[CR 3] COXETER (H. S. M.). *Non-euclidean Geometry*, The University of Toronto Press.

[CR 4] COXETER (H. S. M.). *Regular Complex Polytopes*, Cambridge University Press.

[CR 5] COXETER (H. S. M.). *The Problem of Apollonius*, American Math. Monthly, 75, 1968, p. 5-15.

[CS] CASSELS (J. W. S.). *An Introduction to the Geometry of Numbers*, Springer.

[CT] CHOQUET (Gustave). *Cours d'Analyse, tome II : Topologie*, Masson.

[CY] CHEVALLEY (Claude). *Theory of Lie Groups*, Princeton University Press.

[CZ] CONZE (Jean-Pierre). *Le théorème d'isomorphisme d'Ornstein et la classification des systèmes dynamiques en théorie ergodique*, Séminaire Bourbaki, novembre 1972.

[D-C 1] DELTHEIL (Robert) et CAIRE (Daniel). *Géométrie*, J. B. Baillière.

[D-C 2] DELTHEIL (Robert) et CAIRE (Daniel). *Compléments de géométrie*, J. B. Baillière.

[DE 1] DIEUDONNÉ (Jean). *La géométrie des groupes classiques*, 2e *édition*, Springer.

[DE 2] DIEUDONNÉ (Jean). *Algèbre linéaire et géométrie élémentaire*, 3e *édition*, Hermann.

[DE 3] DIEUDONNÉ (Jean). *Calcul infinitésimal*, Hermann.

[DE 4] DIEUDONNÉ (Jean). *Eléments d'Analyse, tome II*, Gauthier-Villars.

[DE 5] DIEUDONNÉ (Jean), *Eléments d'Analyse, tome III*, Gauthier-Villars.

[DE 6] DIEUDONNÉ (Jean). *Eléments d'Analyse, tome IV*, Gauthier-Villars.

[DE 7] DIEUDONNÉ (Jean). *Foundations of Modern Analysis*, Academic Press.

[DE 8] DIEUDONNÉ (Jean). *Cours de Géométrie Algébrique* (*tomes* 1 *et* 2), Presses Universitaires de France.

[D-G-K] DANZER (L.), GRÜNBAUM (B.) et KLEE (V.). *Helly's Theorem and its Relatives*, A.M.S. Symposium on Convexity, Proc. Symp. Pure Math., volume 7, 1963.

[DI] DEMBOWSKI (P.). *Finite Geometries*, Ergebnisse der Mathematik, n° 44, Springer.

[DI-CA] DIEUDONNÉ (Jean) et CARRELL (James B.). *Invariant Theory, Old and New*, Academic Press.

[DN] DANJON (André). *Astronomie générale*, J. et R. Sennac.

[DO] DORRIE (Heinrich). 100 *Great Problems of Elementary Mathematics*, Dover.

[DQ] DUPORCQ (Ernest). *Premiers principes de géométrie moderne*, 3e *édition*, Gauthier-Villars.

[DR] DIXMIER (Jacques). *Cours de mathematiques du premier cycle, deuxième année*, Gauthier-Villars.

[DV] DVORETSKY (Aryeh). *Some results on convex bodies and Banach spaces*, p. 123-160 dans Proceedings of the International Symposium on Linear Spaces, Jerusalem, 1961.

[DX] DARBOUX (Gaston). *Principes de Géométrie Analytique*, Gauthier-Villars.

[DY] DOUADY (Adrien). *Le shaddock à six becs*, Bulletin A.P.M.E.P., 281, 1971, p. 699.

[EE] *Encyklopädie der Mathematischen Wissenchaften, Geometrie*, III.2.1, Teubner.

[E-K] EELLS (James) et KUIPER (Nicolas O.). *Manifolds which are like Projective Planes*, Public. Math. I.H.E.S., n° 14, p. 5-46.

[EL] ELLISON (W. J.). *Waring's problem*, American Math. Monthly, 78, 1971.

[EN] EGGLESTON (H. G.). *Convexity*, Cambridge University Press.

[ER] ESCHER (M. C.). *L'œuvre graphique*, Solin, Paris.

[E-S] EELLS (J.) et SAMPSON (J. H.). *Harmonic Mappings of Riemannian Manifolds*, American Journal of Math., 86, 1964, p. 109-160.

[FA] FALCONER (K. J.). *A characterisation of plane curves of constant width*, J. London Math. Soc., 16, 1977, p. 536-538.

[FI] FILLMORE (Jay P.). *Symmetries of surfaces of constant width*, J. of Diff. Geometry, 3, 1969, p. 103-110.

[FL] FRENKEL (Jean). *Géométrie pour l'élève-professeur*, Hermann.

[FN] FULTON (William). *Algebraic Curves*, Benjamin.

[FR] FEDERER (Herbert). *Geometric Measure Theory*, Springer.

[FT 1] FEJES-TOTH (L.). *Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum*, Springer.

[FT 2] FEJES-TOTH (L.). *Regular Figures*, Pergamon.

[GA] GARDNER (Martin). *Extraordinary nonperiodic tiling that enriches the theory of tiles*, Scientific American, January 1977.

[GE] GONSETH (F.). *Un théorème relatif à deux ellipsoïdes confocaux*, Bulletin des Sciences Math., 42, 1918, p. 177-180 et 193-194.

[GG] GREENBERG (Marvin J.). *Lectures on Algebraic Topology*, Benjamin.

[G-G-V] GELFAND (I. M.), GRAEV (M. I.) et VILENKIN (N. Ya). *Generalized Functions, volume 5, Integral Geometry and Representation Theory*, Academic Press.

[GIS] GRIFFITHS (Phillip A.). *Variations on a Theorem of Abel*, Inventiones Math., 35, 1976, p. 321-390.

[GI-WE] GIBBONS (J. C.) et WEBB (C.). *Circle preserving maps of spheres*, preprint, Illinois Institute of Technology, Chicago.

[GK] *Grundzüge der Mathematik, Band IV : Praktische Methoden und Anwendungen der Mathematik*, Vandenhoeck and Ruprecht.

[G-K-M] GROMOLL (D.), KLINGENBERG (W.) et MEYER (W.). *Riemannsche Geometrie im Grossen, Lecture Notes in Mathematics*, n° 55, Springer.

[GL] GLUCK (Herman). *Almost All Simply Connected Closed Surfaces are Rigid*, preprint, University of Pennsylvania.

[GM] GRAMAIN (André). *Topologie des surfaces*, Presses Universitaires de France.

[GN] GÉRARDIN (Paul). *Mathématiques Elémentaires Approfondies*, cours polycopié, Université Paris VII, U.E.R. de Mathématiques.

[G-O] GELBAUM (Bernard D.) et OLMSTED (John M. H.). *Counterexamples in Analysis*, Holden-Day.

[GR] GUGGENHEIMER (Heinrich W.). *Plane Geometry and its Groups*, Holden-Day.

[GR-HA] GRIFFITHS (P.) et HARRIS (S.). *On Cayley's Explicit Solution to Poncelet's Porism*, L'Enseignement Mathématique, 24, 1978, p. 31-40.

[GR-SH1] GRÜNBAUM (B.) et SHEPHARD (G. C.). *The eighty-one types of isohedral tilings in the plane*, Math. Proc. Cambridge Phil. Soc., 82, 1977, p. 177-196.

[GR-SH2] GRÜNBAUM (B.) et SHEPHARD (G. C.). *The 91 types of isogonal tiling in the plane*, Trans. A.M.S., 242, 1978, p. 335-354.

[GS] *Geometric Inequalities* (BOTTEMA *et alia*), Wolters-Noordhoof.

[GT] GUICHARDET (A.). *Calcul intégral*, Armand Colin.

[GX] GODEAUX (Lucien). *Les géométries*, Armand Colin.

[HA] HALL (M.). *The Theory of Groups*, Mac Millan.

[HA-WR] HARDY (G. H.) et WRIGHT (E. M.). *An Introduction to the Theory of Numbers*, Oxford University Press.

[H-C] HILBERT (D.) et COHN-VOSSEN (S.). *Geometry and the Imagination*, Chelsea.

[HD 1] HADAMARD (Jacques). *Leçons de géométrie élémentaire, tome I*, 10e *édition*, Armand Colin.

[HD 2] HADAMARD (Jacques). *Leçons de géométrie élémentaire, tome II*, 7e *édition*, Armand Colin.

[H-K] HAUPT (O.) et KÜNNETH (H.). *Geometrische Ordnungen*, Springer.

[H-L-P] HARDY (G. H.), LITTLEWOOD (J. E.) et POLYA (G.). *Inequalities*, Cambridge University Press.

[HM] HARTMAN (P.). *On Isometries and a Theorem of Liouville*, Mathematische Zeitschrift, 69, 1958, p. 202-210.

[HN] HELGASON (Sigurdur). *Differential Geometry and Symmetric Spaces*, Academic Press.

[HOL] d'HOLLANDER (Raymond). *Topologie Générale, tome I : Généralités, Mesure des angles et des distances*, Eyrolles.

[HO-PE] HODGE (W. V. D.) et PEDOE (D.). *Methods of Algebraic Geometry*, Cambridge University Press.

[H-P] HUGHES (Daniel R.) et PIPER (Fred C.). *Projective Planes*, Springer.

[HR] HADWIGER (H.). *Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie*, Springer.

[HS] HERSCH (Joseph). *Quatre propriétés des membranes sphériques homogènes*, C.R.A.S., 270, 1970, p. 1714-1716.

[HU] HUSEMOLLER (Dale). *Fibre Bundles*, McGraw Hill.

[H-W] HILTON (P. J.) et WYLIE (S.). *Homology Theory*, Cambridge University Press.

[H-Y] HOCKING (John G.) et YOUNG (Gail S.). *Topology*, Addison-Wesley.

[HZ] HURWITZ (M. A.). *Sur quelques applications géométriques des séries de Fourier*, Annales Ecole Norm., 19, 1902, p. 357-408.

[I-R] ILLIOVICI (G.) et ROBERT (P.). *Géométrie*, Eyrolles.

[JE] JOEDICKE (Jürgen). *Les structures en voiles et coques*, Vincent, Fréal et Cie.

[KE] KRÉE (P.). *Introduction aux mathématiques et à leurs applications fondamentales, M.P.* 2, Dunod.

[KF] KAZARINOFF (Nicholas D.). *Geometric Inequalities*, Random House.

[KG 1] KLINGENBERG (Wilhelm). *Eine Vorlesung über Differential Geometrie*, Springer.

[KG 2] KLINGENBERG (Wilhelm). *Paare symmetrischen und alternierenden Formen zweiten Grades*, Abhandl. Math. Sem. Hamburg, 19, 1955, p. 78-93.

[KH] KUROSH (A. G.). *Lectures in General Algebra*, Pergamon.

[KM] KLOTZ-MILNOR (Tilla). *Efimov's Theorem about Complete Immersed Surfaces of Negative Curvature*, Advances in Math., 8, 1972, p. 474-543.

[KN 1] KLEIN (Félix). *Lectures on the Icosahedron*, Dover.

[KN 2] KLEIN (Félix). *Vorlesungen über höhere Geometrie*, Springer.

[KO-NO 1] KOBAYASHI (Shoshichi) et NOMIZU (Katsumi). *Foundations of Differential Geometry, volume I*, Interscience.

[KO-NO 2] KOBAYASHI (Shoshichi) et NOMIZU (Katsumi). *Foundations of Differential Geometry, volume II*, Interscience.

[LB 1] LEBESGUE (Henri). *Leçons sur les constructions géométriques*, Gauthier-Villars.

[LB 2] LEBESGUE (Henri). *Les coniques*, Gauthier-Villars.

[LB 3] LEBESGUE (Henri). *Octaèdres articulés de Bricard*, l'Enseignement mathématique, 13, 1967, p. 175-185.

[LE] LEKERKERKER (C. G.). *Geometry of numbers*, Walters-Noordhoff.

[LF 1] LELONG-FERRAND (Jacqueline). *Géométrie différentielle*, Masson.

[LF 2] LELONG-FERRAND (Jacqueline). *Transformations conformes et quasi-conformes des variétés riemanniennes compactes*,

Mémoires Acad. Royale Belg., Cl. Sci. Mém. Coll. in-8°, 1971, fascicule 5.

[LF 3] LELONG-FERRAND (Jacqueline). *Invariants conformes globaux sur les variétés riemanniennes*, J. of Diff. Geometry, 8, 1973, p. 487-510.

[LF-AR] LELONG-FERRAND (J.) et ARNAUDIÈS (J.-M.). *Cours de mathématiques, tome* 3, Dunod.

[LG 1] LANG (Serge). *Elliptic Functions*, Addison-Wesley.

[LG 2] LANG (Serge). *Analysis II*, Addison-Wesley.

[LM 1] LEMAIRE (J.). *Hypocycloïdes et Epicycloïdes*, Vuibert.

[LM 2] LEMAIRE (J.). *L'hyperbole équilatère*, Vuibert.

[LP] *Le libre du problème, volume 4 : la convexité*, CEDIC.

[LR 1] LEHNER (Joseph). *A Short Course in Automorphic Functions*. Holt, Rinehart and Winston.

[LR 2] LEHNER (Joseph). *Discontinuous Groups and Automorphic Functions*, Math. Surveys, number VIII, American Math. Society.

[LS] LEVALLOIS (Jean-Jacques). *Géodésie Générale, tome II : Géodésie classique bidimensionnelle*, Eyrolles.

[LU] LUSTERNIK (Lazar A.). *Convex Figures and Polyhedra*, Heath.

[LY] LEVY (Harry). *Projective and Related Geometry*, Mac Millan.

[LZ] LAZUTKIN (V. F.). *The Existence of Caustics for a Billiard Problem in a Convex Domain*, Math. USSR Izvestia, 7, 1973, p. 185-214.

[MA] MALLIAVIN (Paul). *Géométrie différentielle intrinsèque*, Hermann.

[MD] MARCHAUD (A.). *Les surfaces du second ordre en géométrie finie*, J. Math. pures et appl., 9-15, 1936, p. 293-300.

[MI] MILNOR (John). *A problem in cartography*, American Math. Monthly, 76, 1969, p. 1101-1102.

[MJ] MANDELBROJT (Benoît). *Les Objets fractals*, Flammarion.

[ML] MICHEL (Charles). *Compléments de géométrie moderne*, Vuibert.

[M-P] MODENOV (P. S.) et PARKHOMENKO (A. S.). *Geometric Transformations, volume I*, Academic Press.

[MR] MATHER (J.). *The nice dimensions*, *Proceedings of Liverpool Singularities, Symposium I*, Lecture Notes in Mathematics n° 192, Springer.

[M-T] MARTINEAU (André) et TREVES (Francois). *Eléments de la théorie des espaces vectoriels topologiques et des distributions, fascicule I*, C.D.U.

[MW 1] MOSTOW (G. D.). *Strong Rigidity of Locally Symmetric Spaces*, Annals of Mathematical Studies, n° 78, Princeton University Press.

[MW 2] MOSTOW (G. D.). *Discrete Subgroups of Lie Groups*, Advances in Mathematics, 15, 1975, p. 112-123.

[NA] NEVANLINNA (Rolf). *On Differentiable Mappings, Analytic Functions*, p. 3-9, Princeton University Press.

[OA] OBATA (M.). *The Conjecture on Conformal Transformations of Riemannian Manifolds*, J. of Differential Geometry, 6, 1972, p. 247-258.

[OM] O'MEARA (O. T.). *Introduction to Quadratic Forms*, Springer.

[OS 1] OSSERMAN (Robert). *Bonnesen-style Isoperimetric Inequalities*, American Math. Monthly, 86, 1979, p. 1-29.

[OS 2] OSSERMAN (Robert). *The isoperimetric inequality*, Bull. Amer. Math. Soc., 84, 1978, p. 1182-1238.

[PA] PALAIS (Richard). *The Classification of G-Spaces*, Memoirs of the A.M.S., n° 36.

[PC] PASCAL (Blaise). *Pensées*, édition Brunschwig.

[PE] PEDOE (D.). *A Course of Geometry*, Cambridge University Press.

[PL] POHL (William F.). *A Theorem of Géométrie finie*, Journal of Differential Geometry, 10, 1975, p. 435-466.

[PN] PAYNE (L. E.). *Isomerimetric Inequalities and their Applications*, SIAM Review, 9, 1967, p. 453-488.

[PO] PORTEOUS (I. R.). *Topological Geometry*, Van Nostrand-Reinhold.

[PR] PORTER (T. I.). *A History of the Classical Isoperimetric Problem, Contributions to the Calculus of Variations*, University of Chicago Press, 1933.

[P-S] POLYA (G.) et SZEGÖ (G.). *Isoperimetric Inequalities in Mathematical Physics*, Princeton University Press ou Kraus Reprint Corporation.

[PT] PICKERT (G.). *Projektive Ebenen*, Springer.

[PV 1] POGORELOV (A. V.). *Extrinsic Geometry of Convex Surfaces*, Israël Programm for Scientific Translation, Jerusalem.

[PV 2] POGORELOV (A. D.). *Complete Solution of Hilbert's Fourth* John Wyley, 1979.

[RA] RADEMACHER (Hans). *Topics in Analytic Number Theory*, Grundlehren n° 169, Springer.

[R-C 1] ROUCHE (Eugène) et de COMBEROUSSE (Charles). *Traité de Géométrie*, 1re *partie*, Gauthier-Villars.

[R-C 2] ROUCHE (Eugène) et de COMBEROUSSE (Charles). *Traité de Géométrie*, 2e *partie*, Gauthier-Villars.

[RE] ROUSSARIE (Robert). *Sur les feuilletages de variétés de dimension* 3, Annales de l'Institut Fourier, 21(3), 1971, p. 13-81.

[RM] DE RHAM (Georges). *Sur les polygones générateurs des groupes fuchsiens*, l'Enseignement mathématique, 17, 1971, p. 49-61.

[RN 1] ROBINSON (Raphael M.), *Undecidability and Nonperiodicity for Tilings of the Plane*, Inventiones Math., 12, 1971, p. 177-209.

[RN 2] ROBINSON (Raphael M.). *Undecidable Tiling Problems in the Hyperbolic Plane*, Inventiones Math., 44, 1978, p. 259-264.

[RN 3] ROBINSON (Raphael M.). *Comments on the Penrose Tiles*, preprint, University of California, Berkeley.

[RO] ROMANOV (V. G.). *Integral Geometry and Inverse Problems for Hyperbolic Equations*, Springer.

[RS] ROGERS (C. A.). *Packing and Covering*, Cambridge University Press.

[R-V] ROBERTS (A. Wayne) et VARBERG (Dale E.). *Convex Functions*, Academic Press.

[SA] SHIMURA (G.). *Introduction to the Arithmetic Theory of Automorphic Functions*, Iwanami Shoten et Princeton University Press.

[SB] STERNBERG (Shlomo). *Lectures on Differential Geometry*, Prentice-Hall.

[SC 1] SCHATTSCHNEIDER (Doris). *The plane symmetry groups : their recognition and notation*, American Math. Monthly, 85, 1978, p. 439-450.

[SC 2] SCHATTSCHNEIDER (Doris). *Tiling the plane with congruent pentagons*, Mathematics Magazine, 51 (1978), p. 29-44.

[SD 1] STAUDE (Otto). *Fadenconstructionen des Ellipsoides*, Math. Annalen, 20, 1882, p. 147-184.

[SD 2] STAUDE (Otto). *Die Fokaleigenschaften der Flächen Zweiter Ordnung*, Leipzig, 1896.

[SE 1] SERRE (Jean-Pierre). *Corps locaux*, Hermann.

[SE 2] SERRE (Jean-Pierre). *Cours d'arithmétique*, Presses Universitaires de France.

[SE 3] SERRE (Jean-Pierre). *Algèbres de Lie semi-simples complexes*, W. A. Benjamin.

[SE-TH] SEIFERT (H.) et THRELFALL (W.). *Lehrbuch der Topologie*, Chelsea.

[SF 1] SCHWERDTFEGER (Hans). *Invariants of a class of transformation groups*, Aequationes Math., 14, 1976, p. 105-110.

[SF 2] SCHWERDTFEGER (Hans). *Invariants à cinq points dans le plan projectif*, C.R.A.S., 285, 1977, p. 127-128.

[SG] SEIDENBERG (A.). *Lectures in Projective Geometry*, Van Nostrand.

[SGR] *Séminaire de Géométrie Riemannienne de l'Université Paris VII*, 1970-1971.

[SK] SPIVAK (Michael). *Differential Geometry, volume II*, Michael Spivak.

[SL 1] SALLEE (G. T.). *Maximal areas of Reuleaux polygons*, Canadian Math. Bull., 13, 1970, p. 175-179.

[SL 2] SALLEE (G. T.). *Reuleaux polytopes*, Mathematika, 17, 1970, p. 315-323.

[SN] STEIN (S. K.). *Tiling Space by Congruent Polyhedra*, Bulletin of the A.M.S., 80, 1974, p. 819-820.

[SO] SANTALO (L. A.). *Introduction to Integral Geometry*, Hermann.

[SR] SPANIER (E.). *Algebraic Topology*, McGraw Hill.

[S-T] SNAPPER (Ernst) et TROYER (Robert J.). *Metric Affine Geometry*, Academic Press.

[STE] STEFFEN (Klaus). *A symmetric flexible Connelly sphere with only nine vertices*, preprint, I.H.E.S., Bures-sur-Yvette.

[ST-RA] STEINITZ (E.) et RADEMACHER (H.). *Vorlesungen über die Theorie der Polyeder*, Springer.

[SU] SAMUEL (Pierre). *Unique Factorization*, American Math. Monthly, 75, 1968, p. 945-952.

[SW] STEWART (Ian). *Galois Theory*, Chapman and Hall.

[TG] *Seminar on Transformation Groups*, by Armand BOREL, Annals of Mathematical Studies, nº 46, Princeton.

[TM] THOM (René). *Sur la théorie des enveloppes*, J. de Math. pures et appl., 16, 1962, p. 177-192.

[TS] TITS (Jacques). *Buildings of spherical type and finite BN-pairs*, Springer Lecture Notes in Mathematics, nº 386.

[VE] VALENTINE (Frederik A.). *Convex Sets*, McGraw Hill.

[VG 1] VODERBERG (H.). *Zur Zerlegung eines ebenen Bereiches in*

kongruente Bereiche in Form einer Spirale, Jber. dtsch. Math. Ver., 46, 1936, p. 229-231.

[VG 2] VODERBERG (H.). *Zur Zerlegung eines ebenen Bereiches in kongruente Bereiche in Form einer Spirale*, Jber. dtsch. Math. Ver., 46, 1937, p. 159-160.

[VL] DU VAL (Patrick). *Homographies, Quaternions and Rotations*, Oxford University Press.

[VN] VALIRON (Georges). *Equations fonctionnelles. Applications*, Masson.

[V-Y] VEBLEN (O.) et YOUNG (J. W.). *Projective Geometry*, deux volumes, Ginn and Co.

[WF] WOLF (Joseph A.). *Spaces of Constant Curvature*, J. A. Wolf.

[WK] WALKER (R. J.). *Algebraic Curves*, Dover.

[WL] WEYL (Hermann). *Symmetry*, Princeton University Press.

[WN] WENNINGER (Magnus J.). *Polyhedron Models*, Cambridge University Press.

[WO] WONG (Yung-Chow). *Isoclinic n-Planes in Euclidean 2n-Space, Clifford Parallels in Elliptic (2n − 1)-Space and the Hurwitz Matrix Equations*, Memoirs of the A.M.S., nº 41.

[WR] WARNER (Frank). *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, Scott-Foresman.

[Y-B] YAGLOM (I. M.) et BOLTYANSKII (V. G.). *Convex Figures*, Holt, Rinehart and Winston.

[ZN] ZISMAN (Michel). *Topologie algébrique élémentaire*, Armand Colin.

[ZR] ZWIKKER (C.). *The advanced Geometry of Plane Curves and their Applications*, Dover.

（补充参考书目）

[B-B-N-W-Z] BROWN(H.), BÜLOW(R.), NEUBÜSER(J.), WONDRATSCHEK (H.), ZASSENHAUS (H.). *Crystallographic groups of four-dimensional space*, Wyley, 1978.

[GBG] GREENBERG (Marvin J.). *Euclidean and Non-Euclidean Geometry, Development and History*, W. H. Freeman and Co., San Francisco, 1980.